Laurea Triennale in Matematica, Università La Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
Prova scritta del 29 Settembre 2016
Soluzione degli esercizi proposti

Esercizio 1. Siano X ed Y due variabili aleatorie con distribuzione congiunta gaussiana $\mathcal{N}(0,0;4,4;\rho)$. Indichiamo con il simbolo m il valore atteso condizionato della variabile Y, data l'osservazione $\left(X=\frac{1}{2}\right)$.

a) Determinare, in funzione di m, il coefficiente di correlazione ρ;

b) Determinare, in funzione di m, la varianza condizionata $Var\left(Y|X=\frac{1}{2}\right)$;

c) Supponiamo che ρ sia tale che valga $m=\frac{1}{4}$, calcolare

$$P\left(-1.7647 < Y < 2.2647 | X=\frac{1}{2}\right).$$

Soluzione

a) Sappiamo che, per distribuzioni gaussiane bidimensionali, vale in generale la formula

$$\mathbb{E}\left(Y|X=x\right)=\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-\mu_X\right).$$

Nel presente caso, possiamo dunque scrivere

$$m=\frac{1}{2}\rho,$$

da cui

$$\rho=2m.$$

Ciò mostra che i valori possibili per m possono variare nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

b) Sappiamo che, per distribuzioni gaussiane bidimensionali, vale in generale la formula

$$Var(Y|X=x)=\sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right),$$

indipendentemente dal valore $x\in\mathbb{R}$. Nel presente caso, possiamo dunque scrivere

$$Var(Y|X=x)=4\left(1-4m^2\right).$$

c) Sotto la condizione $m=\frac{1}{4}$ si ha che la distribuzione condizionata di Y, dato $X=\frac{1}{2}$, risulta dunque essere gaussiana con valore atteso $\frac{1}{4}$ e varianza 3.

Quindi, indicando al solito con Z una variabile aleatoria fittizia con distribuzione gaussiana standard,

$$\mathbb{P}\left(-1.7647 < Y < 2.2647 | X=\frac{1}{2}\right)=$$

$$\mathbb{P}\left(-1.7647 < \frac{1}{4}+Z\sqrt{3} < 2.2647\right)=$$

$$\mathbb{P}\left(-1.1632 < Z < 1.1632\right) =$$
$$= 2\Phi\left(1.1632\right) - 1 = 2 \times 0.8777 - 1 = 0.7554.$$

Esercizio 2.

Siano $X_1, X_2, ..., X_{12}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione gaussiana standard e poniamo

$$W_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{12} \left(X_j\right)^2}{6}.$$

a) Determinare la funzione di densità di W_{12};
b) Calcolare il valore atteso di W_{12};
c) Determinare la funzione caratteristica di W_{12}.

Soluzione

a) Possiamo scrivere W_{12} nella forma

$$W_{12} = \frac{\sum_{h=1}^{6} R_h}{6},$$

dove $R_1, ..., R_6$ sono variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\mu = \frac{1}{2}$.

La distribuzione di probabilità di $S \equiv \sum_{h=1}^{6} R_h$ è una *gamma* di parametri $\left(6, \frac{1}{2}\right)$ e la funzione di densità è quindi

$$f_S(s) = \frac{1}{2^6 \times 5!} s^5 \exp\{-\frac{s}{2}\} \mathbf{1}_{[0,+\infty]}.$$

Possiamo concludere, per $w > 0$,

$$f_{W_{12}}(w) = \frac{d}{dw} F_{W_{12}}(w) = \frac{d}{dw} \mathbb{P}\left(S \leq 6w\right) = \frac{d}{dw} F_S\left(6w\right) = 6 f_S(6w) =$$
$$\frac{6}{2^6 \times 5!} \times (6w)^5 \times \exp\{-3w\} = \frac{3^6}{5!} w^5 \exp\{-3w\};$$

cioè W_{12} segue una distribuzione *gamma* di parametri $(6, 3)$.

b) Dalla conclusione ottenuta nel precedente punto a), risulta

$$\mathbb{E}\left(W_{12}\right) = 2.$$

c) La variabile R_h si può vedere come $2M$, essendo M una variabile con distribuzione esponenziale standard e, in virtù delle proprietà fondamentali delle funzioni caratteristiche, possiamo scrivere:

$$\varphi_{W_{12}}(t) = \varphi_S\left(\frac{t}{6}\right) = \left[\varphi_{R_1}\left(\frac{t}{6}\right)\right]^6 = \left[\varphi_M\left(2 \times \frac{t}{6}\right)\right]^6 = \frac{1}{1 - i\frac{t}{3}} = \frac{3}{3 - it}.$$

Esercizio 3.

$\{N_t\}_{t\geq 0}$ è un processo di Poisson tale che

$$\mathbb{P}\{N_1 = 0\} = 0.778\,8.$$

a) Calcolare

$$\mathbb{P}\{N_2 = 2, N_6 = 12\};$$

b) Calcolare

$$\mathbb{P}\{N_2 = 2, N_6 = 12 | N_4 = 7\}.$$

Soluzione

Dalla condizione

$$\mathbb{P}\{N_1 = 0\} = 0.778\,8,$$

ricaviamo

$$e^{-\mu} = 0.778\,8$$

e quindi

$$\mu = -\log 0.778\,8 = \frac{1}{4}.$$

a)

$$\mathbb{P}\{N_2 = 2, N_6 = 12\} = \mathbb{P}\{N_2 = 2\} \times \mathbb{P}\{N_4 = 10\}$$
$$= \frac{e^{-2\mu}\left(2\mu\right)^2 \times e^{-4\mu}\left(4\mu\right)^{10}}{2 \times 10!} = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{8 \times 10!}$$

b)

$$\mathbb{P}\{N_2 = 2, N_6 = 12 | N_4 = 7\} =$$
$$\frac{\mathbb{P}\{N_2 = 2, N_4 = 7, N_6 = 12\}}{\mathbb{P}\{N_4 = 7\}} =$$
$$\frac{\mathbb{P}\{N_2 = 2\} \times \mathbb{P}\{N_2 = 5\} \times \mathbb{P}\{N_2 = 5\}}{\mathbb{P}\{N_4 = 7\}} =$$

$$= \frac{\frac{e^{-2\mu}(2\mu)^2}{2} \times \frac{e^{-2\mu}(2\mu)^5}{5!} \times \frac{e^{-2\mu}(2\mu)^5}{5!}}{\frac{e^{-4\mu}(4\mu)^5}{7!!}} = \frac{\frac{e^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4}}{2} \times \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^5 \times 5!} \times \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^5 \times 5!}}{\frac{e^{-1}}{7!}} = e^{-\frac{1}{2}} \binom{7}{2} \frac{1}{5!2^{12}}.$$