Laurea Triennale in Matematica, Università La Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
Prova scritta del 15 Settembre 2016
Soluzioni degli esercizi proposti

Esercizio 1. Siano $\mathcal{E}$ ed Θ due variabili aleatorie indipendenti e gaussiane: $\mathcal{E} \backsim \mathcal{N}\left(0, \widehat{\sigma}^2\right)$, $\Theta \backsim \mathcal{N}(2,9)$. Consideriamo inoltre la variabile aleatoria X, definita dalla posizione

$$X = \Theta + \mathcal{E}.$$

a) Determinare la covarianza $Cov(X, \Theta)$;

b) determinare il valore $\widehat{\sigma}^2$ della varianza di $\mathcal{E}$, supponendo che la distribuzione condizionata di Θ dato $(X = 1)$ sia una gaussiana con varianza uguale a $\frac{63}{16}$;

c) determinare il valore atteso della distribuzione condizionata di Θ dato $(X = 1)$.

Soluzione

a) Tenendo conto delle proprietà di simmetria e di bilinearità della covarianza, e in virtù dell' indipendenza stocastica fra $\mathcal{E}$ ed Θ, possiamo scrivere

$$Cov(X, \Theta) = Cov(\Theta, X) = Cov(\Theta, \Theta) + Cov(\Theta, \mathcal{E}) =$$

$$= Var(\Theta) = 9.$$

b) La distribuzione congiunta della coppia X, Θ è una gaussiana bidimensionale

$$\mathcal{N}\left(2, 2; 9 + \widehat{\sigma}, 9; \frac{9}{3\sqrt{9 + \widehat{\sigma}}}\right),$$

essendo $\frac{9}{3\sqrt{9+\widehat{\sigma}}}$ il valore del coefficiente di correlazione $\rho(X, \Theta)$.

Quindi la condizione che la distribuzione condizionata di Θ dato $(X = 1)$ è una gaussiana (unidimensionale) con varianza uguale a $\frac{63}{16}$ ci porta a scrivere

$$\frac{63}{16} = 9\left(1 - \frac{9}{9 + \widehat{\sigma}}\right)$$

da cui ricaviamo

$$\widehat{\sigma} = 7, \rho(X, \Theta) = \frac{3}{4}.$$

c) Dal punto precedente, si ricava che la distribuzione congiunta di (X, Θ) è la gaussiana bidimensionale

$$\mathcal{N}\left(2, 2; 16, 9; \frac{3}{4}\right).$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbb{E}(\Theta | X = 1) = \mathbb{E}(\Theta) + \rho(X, \Theta)\frac{Var(\Theta)}{Var(X)}(1 - \mathbb{E}(X)) =$$

$$= 2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} (\cdot - 1) = \frac{23}{16}.$$

Esercizio 2. Si consideri una catena di Markov $\{X_0, X_1, ...\}$, temporalmente omogenea, con spazio degli stati $\{A, B, C\}$, e con matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0 & r & 1-r \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

essendo $r \in (0, 1)$ un parametro.

a) Verificare se la catena risulta regolare (per qualunque valore di r);

b) determinare la distribuzione invariante, motivandone esistenza ed unicità;

c) per quali valori di r risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P} (X_n = A, X_{n+1} = B, X_{n+2} = A) > \lim_{n\to\infty} \mathbb{P} (X_n = C, X_{n+1} = B, X_{n+2} = C)?$$

Soluzione

a) Indichiamo con P la matrice di transizione assegnata. Si verifica rapidamente che, qualunque sia il valore di r ($r \in (0, 1)$), il quadrato P^2 è una matrice con tutti gli elementi strettamente positivi, da cui segue per definizione la regolarità della catena

b) la regolarità della catena (insieme al fatto che lo spazio degli stati è finito) garantisce che esiste un'unica distribuzione invariante che verrà indicata con $\pi \equiv (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$. La distribuzione π si ricava imponendo le *equazioni del bilancio globale* e la *condizione di normalizzazione*; si ricava cioè come soluzione del sistema

$$\begin{cases} \pi_A = \frac{1}{2} (\pi_B + \pi_C) \\ \pi_B = r\pi_A + \frac{1}{2}\pi_C \\ \pi_C = (1 - r) \pi_A + \frac{1}{2}\pi_B \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases}.$$

Svolgendo il sistema otteniamo

$$\pi_A = \frac{1}{3}, \pi_B = \frac{2(1+r)}{9}, \pi_C = \frac{2(2-r)}{9}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P} (X_n = A, X_{n+1} = B, X_{n+2} = A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = A) \cdot p_{AB} \cdot p_{BA}.$$

In virtù della proprietà di regolarità della catena, il teorema di Markov ci assicura che π è anche una distribuzione di equilibrio: qualunque sia la distribuzione iniziale per la catena, possiamo scrivere

$$\begin{matrix} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = A) = \pi_A \\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = B) = \pi_B \\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = C) = \pi_C \end{matrix}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = A, X_{n+1} = B, X_{n+2} = A\right) = \frac{1}{3} \cdot r \cdot \frac{1}{2} = \frac{r}{6}.$$

Analogamente otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = C, X_{n+1} = B, X_{n+2} = C\right) = \pi_C \cdot p_{CB} \cdot p_{BC} = \frac{2-r}{18}.$$

Possiamo concludere che la disuguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = A, X_{n+1} = B, X_{n+2} = A\right) > \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = C, X_{n+1} = B, X_{n+2} = C\right)$$

risulta verificata per $r \in (0,1)$.

Esercizio 3. X, Y sono due variabili aleatorie con distribuzione congiunta uniforme nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| \leq 1\}.$$

a) determinare la funzione di densità marginale $f_X(x)$ di X;

b) determinare la densità condizionata di Y dato $(X = x)$, al variare di x nell'insieme dei valori dove $f_X(x) > 0$;

c) calcolare la covarianza $Cov\,(X,Y)$ e specificare se X, Y sono stocasticamente indipendenti.

Soluzione

Il dominio D coincide con la regione convessa, di area uguale a 2, individuata dai vertici $(1,0)\,,(0,1)\,,(-1,0)\,,(-1,-1)$.

a) Per $x \in (-1,1)$,

$$f_X(x) := \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,\zeta)d\zeta = \int_{-(1-|x|)}^{+(1-|x|)} \frac{1}{2}\, d\zeta = 1 - |x|.$$

Per $x \notin (-1,1)$, $f_X(x)$ risulta nulla. Uguale forma assume anche $f_Y(y)$.

b) Per $x \in (-1,1)$

$$f_Y(y|X = x) := \frac{f_{X,Y}(x,\zeta)}{f_X(x)} = \frac{1}{2\,(1-|x|)}\mathbf{1}_{(-(1-|x|),+(1-|x|))}(y).$$

c) Le funzioni di densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ sono positive soltanto su un dominio finito e quindi esistono finiti i valori attesi $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$. inoltre tali densità sono simmetriche rispetto all'origine e quindi

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0,$$

$$Cov\,(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y).$$

Per analoghe proprietà di simmetria - rispetto agli assi cartesiani- della densità congiunta $f_{X,Y}$, risulta inoltre $\mathbb{E}(X \cdot Y) = 0$ e possiamo concludere che $Cov\,(X,Y) = 0$.

X, Y sono stocasticamente indipendenti? Chiaramentre la risposta è negativa, come ad esempio è evidenziato dal fatto che $f_Y(y|X = x) \neq f_Y(y)$.

Sappiamo (come di fatto abbiamo utilizzato nell'Esercizio 1.) che la condizione di indipendenza stocastica fra X e Y implica $Cov\,(X,Y) = 0$. Ma non vale, in generale, l'implicazione inversa. Il caso qui considerato fornisce quindi un semplice controesempio.