Laurea Triennale in Matematica, Università La Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
Prova scritta del 26 Luglio 2016
Soluzione degli esercizi proposti

Esercizio 1. Sia $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un processo di Poisson di intensità $\mu = 2$ e siano $T_1, T_2, ...$ i relativi tempi di arrivo.

a) Calcolare la probabilità

$$\mathbb{P}\{T_4 \leq \frac{7}{2} < T_6\}.$$

b) Calcolare la probabilità condizionata

$$\mathbb{P}\{T_4 \leq \frac{7}{2} < T_6 | N_{\frac{3}{2}} = 1, N_4 = 7\}.$$

Soluzione

a) L'evento $\{T_4 \leq \frac{7}{2} < T_6\}$ è equivalente a $\{4 \leq N_{\frac{7}{2}} < 6\}$. Dunque

$$\mathbb{P}\{T_4 \leq \frac{7}{2} < T_6\} = \mathbb{P}\{\Big(N_{\frac{7}{2}} = 4\Big) \cup \Big(N_{\frac{7}{2}} = 5\Big)\} =$$

$$e^{-7}\left(\frac{7^4}{4!} + \frac{7^5}{5!}\right) \simeq 0.218\,94.$$

b) La probabilità dell'evento condizionante è data da

$$\mathbb{P}\{N_{\frac{3}{2}} = 1, N_4 = 7\} = \mathbb{P}\{N_{\frac{3}{2}} = 1\}\mathbb{P}\{N_4 = 7 | N_{\frac{3}{2}} = 1\} =$$

$$\mathbb{P}\{N_{\frac{3}{2}} = 1\}\mathbb{P}\{N_{\frac{5}{2}} = 6\} = 3e^{-3} \times \frac{5^6}{6!}e^{-5} = e^{-8} \times 3 \times \frac{5^6}{6!}.$$

$$\mathbb{P}\{T_4 \leq \frac{7}{2} < T_6 | N_{\frac{3}{2}} = 1, N_4 = 7\} =$$

$$\mathbb{P}\{N_{\frac{7}{2}} = 4 | N_{\frac{3}{2}} = 1, N_4 = 7\} + \mathbb{P}\{N_{\frac{7}{2}} = 5 | N_{\frac{3}{2}} = 1, N_4 = 7\} =$$

$$\frac{6! \times \mathbb{P}\{N_{\frac{3}{2}} = 1, N_{\frac{7}{2}} = 4, N_4 = 7\}}{3 \times 5^6 \times e^{-8}} + \frac{6! \times \mathbb{P}\{N_{\frac{3}{2}} = 1, N_{\frac{7}{2}} = 5, N_4 = 7\}}{3 \times 5^6 \times e^{-8}} =$$

$$\frac{6! \times \mathbb{P}\{N_{\frac{3}{2}} = 1\} \times \mathbb{P}\{N_2 = 3\} \times \mathbb{P}\{N_{\frac{1}{2}} = 3\}}{3 \times 5^6 \times e^{-8}} + \frac{6! \times \mathbb{P}\{N_{\frac{3}{2}} = 1\} \times \mathbb{P}\{N_2 = 4\} \times \mathbb{P}\{N_{\frac{1}{2}} = 2\}}{3 \times 5^6 \times e^{-8}} =$$

$$\frac{6! \times e^{-3} \times 3 \times e^{-4} \times 4^3 \times e^{-1}}{3 \times 5^6 \times e^{-8} \times 3! \times 3!} + \frac{6! \times e^{-3} \times 3 \times e^{-4} \times 4^4 \times e^{-1}}{3 \times 5^6 \times e^{-8} \times 4! \times 2!} =$$

$$\frac{6! \times 4^3}{3! \times 2! \times 5^6}\left(\frac{1}{3} + 1\right) \simeq 0.327\,68.$$

Esercizio 2. X, Y sono variabili aleatorie di valore atteso $\mu = 0$, di varianza $\sigma^2 = 4$ e con una distribuzione congiunta gaussiana bidimensionale. Assumiamo inoltre che, data l'osservazione $(X = 1)$, la distribuzione condizionata di Y sia una gaussiana di valore atteso $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e varianza unitaria.

a) Determinare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

b) Calcolare

$$\mathbb{P}\{Y \leq 0.415\,97 | X = -1\}.$$

Soluzione

a) Sappiamo che, condizionatamente a $(X = x_0)$, la distribuzione di Y deve essere una gaussiana di valore atteso

$$\beta\,(x_0) = \mu_Y + \rho(X, Y) \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x_0 - \mu_X)$$

e varianza

$$\widetilde{\sigma}_Y^2 = \sigma_Y^2 \left[1 - (\rho(X, Y))^2\right].$$

Deve risultare dunque

$$\rho(X, Y) = [\beta\,(x_0) - \mu_Y] \frac{\sigma_X}{\sigma_Y\,(x_0 - \mu_X)},$$

$$\rho^2(X, Y) = 1 - \frac{\widetilde{\sigma}_Y^2}{\sigma_Y^2}. \tag{1}$$

Imponendo i dati forniti

$$\mu_X = \mu_Y = 0, \sigma_Y^2 = 4, \widetilde{\sigma}_Y^2 = 1,$$

$$x_0 = 1, \beta\,(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

otteniamo

$$\rho(X, Y) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) In base al valore trovato per $\rho(X, Y)$, segue che la distribuzione condizionata di Y dato $(X = -1)$ risulta essere una gaussiana di varianza unitaria e valore atteso

$$\beta\,(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dunque, indicando al solito con Z una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana standard,

$$\mathbb{P}\{Y \leq 0.415\,97 | X = -1\} = \mathbb{P}\{Z - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0.415\,97\} =$$

$$\mathbb{P}\{Z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + 0.415\,97\} = \mathbb{P}\{Z \leq 1.\,282\} = 0.90$$

Esercizio 3. $\{X_n\}_{n=0,1,\ldots}$ è una catena di Markov sullo spazio degli stati $E \equiv \{T, U, Z\}$, con distribuzione iniziale uguale alla distribuzione *uniforme* su E e con matrice delle probabilità di transizione

$$\begin{matrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-u & u \\ z & 0 & 1-z \end{matrix},$$

essendo t, u, z tre numeri positivi e minori di 1.

a) Calcolare le probabilità di transizione in due passi $p^{(2)}_{T,Z}, p^{(2)}_{U,Z}, p^{(2)}_{Z,Z}$ e

$$\mathbb{P}\left(X_2 = Z\right).$$

b) Calcolare la distribuzione invariante.

c) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{n-2} = T | X_n = Z\right).$$

Soluzione

a) La probabilità di andare dallo stato T allo stato Z in due passi è data da

$$p^{(2)}_{TZ} = t \cdot u;$$

inoltre

$$p^{(2)}_{UZ} = u\left(1-u\right) + u\left(1-z\right),$$

$$p^{(2)}_{ZZ} = \left(1-z\right)^2.$$

Dunque, avendo assunto come distribuzione iniziale la distribuzione uniforme su E, otteniamo

$$\mathbb{P}\left(X_2 = Z\right) = \frac{1}{3}\left[t \cdot u + u\left(1-u\right) + u\left(1-z\right) + \left(1-z\right)^2\right]$$

b) Notiamo innanzitutto che la catena risulta regolare e quindi ammette un'unica distribuzione invariante. Quest'ultima si ricava come soluzione del sistema

$$\pi_T = \left(1-t\right)\pi_T + z \cdot \pi_Z$$

$$\pi_U = \left(1-u\right)\pi_U + t \cdot \pi_T$$

$$\pi_Z = \left(1-z\right)\pi_Z + u \cdot \pi_U$$

$$\pi_T + \pi_U + \pi_Z = 1.$$

Ne risulta

$$\pi_T = \frac{u \cdot z}{C}, \pi_U = \frac{t \cdot z}{C}, \pi_Z = \frac{t \cdot u}{C},$$

dove si è posto

$$C := u \cdot z + t \cdot z + t \cdot u.$$

c) Notiamo innanzitutto che, essendo la catena regolare, la distribuzione invariante (π_T, π_U, π_Z) risulta una distribuzione di equilibrio: cioè, comunque venga fissata la distribuzione iniziale,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = T\right) = \pi_T, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = Z\right) = \pi_Z.$$

Possiamo allora scrivere

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{n-2} = T | X_n = Z\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{\left(X_{n-2} = T\right) \cap \left(X_n = Z\right)\}}{\mathbb{P}\left(X_n = Z\right)}$$

$$\frac{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\left(X_{n-2} = T\right) \cap \left(X_n = Z\right)\}}{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = Z\right)} =$$

$$\frac{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{n-2} = T) \cdot p^{(2)}_{TZ}}{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = Z\right)} = \frac{\pi_T}{\pi_Z} t \cdot u = z \cdot u.$$