Laurea Triennale in Matematica, Università La Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
Prova scritta del 5 Luglio 2016

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di valore atteso $\mu = 1$ e si ponga $Y = \min(X, X^2)$.

a) Determinare la funzione di densità di Y.

b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

c) Siano $Y_1, ..., Y_{144}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione di probabilità identica a quella di Y e si ponga

$$\overline{Y} := \frac{1}{144}\sum_{j=1}^{144} Y_j.$$

Fornire l'approssimazione gaussiana per la probabilità

$$\mathbb{P}\{0.751\,05 \leq \overline{Y} \leq 1.\,041\,7\}.$$

Soluzione

a) La funzione di sopravvivenza della variabile aleatoria Y è data, per $y > 0$, da

$$\overline{F}_Y(y) := \mathbb{P}\{Y > y\} = \mathbb{P}\{(X > y) \cap \left(X^2 > y\right)\} =$$
$$= \begin{cases} \mathbb{P}\{X^2 > y\} & \text{per } y < 1 \\ \mathbb{P}\{X > y\} & \text{per } y > 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \exp\{-\sqrt{y}\} & \text{per } y < 1 \\ \exp\{-y\} & \text{per } y > 1 \end{cases}.$$

Ricordando che la funzione di densità f_Y deve coincidere con l'opposto della derivata di $\overline{F}_Y$, otteniamo

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\sqrt{y}\} & \text{per } y < 1 \\ \exp\{-y\} & \text{per } y > 1 \end{cases}$$

b) Il valore atteso $\mathbb{E}\,(Y) = \mathbb{E}\left(\min(X, X^2)\right)$ si può ottenere attraverso ciascuna delle due formule equivalenti

$$\mathbb{E}\,(Y) = \int_0^{+\infty} y f_Y(y)dy,$$
$$\mathbb{E}\,(Y) = \int_0^{+\infty} \min(x, x^2) f_X(x)dx.$$

Sviluppando, ad esempio, quest'ultima identità, scriviamo

$$\mathbb{E}\,(Y) = \int_0^1 \min(x, x^2) f_X(x)dx + \int_1^{+\infty} \min(x, x^2) f_X(x)dx =$$

$$\int_0^1 \min(x,x^2) f_X(x)dx + \int_1^{+\infty} \min(x,x^2) f_X(x)dx =$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

Sappiamo che $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$, quindi scriviamo

$$\mathbb{E}\left(Y\right) = 1 - \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

Risultando

$$\int x^2 \exp\{-x\} dx = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right),$$

otteniamo

$$\int_0^1 x^2 \exp\{-x\} dx = -5e^{-1} + 2;$$

inoltre

$$\int x \exp\{-x\} dx = -e^{-x}\left(x + 1\right),$$

da cui

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -2e^{-1} + 1$$

e

$$\mathbb{E}\left(Y\right) = 2 - 3e^{-1} = 0.896\,36.$$

Analogamente possiamo scrivere

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \int_0^1 x^4 e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

e, tenendo presente che risulta

$$x^4 e^{-x} = -\frac{d}{dx}\left[e^{-x}\left(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24\right)\right],$$

$$\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 5e^{-1}$$

otteniamo

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = -65e^{-1} + 24 + 5e^{-1} = 24 - 60e^{-1} = 1.\,927\,2,$$

$$Var(Y) = 1.\,927\,2 - \left(0.896\,36\right)^2 = 1.\,123\,7,$$

e anche

$$\sqrt{Var(Y)} = \sqrt{1.1237} = 1.06.$$

c) La variabile aleatoria $\overline{Y}$ ha valore atteso 0.89636 e scarto standard $\frac{1.06}{12}$. In virtù del teorema centrale del limite, approssimiamo la funzione di ripartizione di $\overline{Y}$ con quella della variabile aleatoria

$$0.89636 + \frac{1.06}{12} Z,$$

indicando con Z una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana standard.

Possiamo quindi approssimare la probabilità cercata con

$$\mathbb{P}\{-0.14531 \leq \frac{1.06}{12} Z \leq 0.14534\} =$$

$$\mathbb{P}\{-1.6454 \leq \frac{1.06}{12} Z \leq 1.6454\} = 2\Phi\left(1.6454\right) - 1 = 0.9.$$

Esercizio 2. (Modello di Ehrenfest modificato)

$2M$ biglie numerate vengono inizialmente distribuite fra due urne, A e B. Ad ogni unità di tempo viene selezionata una biglia a caso e (indipendentemente da dove essa si trovasse al momento dell'estrazione) viene deposta con probabilità p nell'urna A e con probabilità q nell'urna B $(p+q=1)$. Indichando con X_n il numero delle biglie nell'urna A al passo n, la successione $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ costituisce una catena di Markov omogenea.

a) Determinare lo spazio degli stati della catena

b) Determinare le probabilità di transizione in un passo

c) Disegnare il grafo di transizione della catena

d) Determinare se la catena è irriducibile e se è regolare

Si ponga in particolare $M = 2, p = \frac{2}{3}$.

e) Individuare la distribuzione invariante per la catena, motivandone esistenza ed unicità

f) Determinare se tale distribuzione invariante è anche reversibile

g) Assumendo la distribuzione iniziale uguale alla distribuzione invariante, calcolare le probabilità

$$\mathbb{P}\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4\},$$

$$\mathbb{P}\{X_0 = 4, X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0\}.$$

Soluzione

a) Lo spazio degli stati è $E = \{0, 1, ..., 2M\}$.

b) Le probabilità di transizione in un passo sono le seguenti:

$$p_{i,i} = q\frac{2M-i}{2M} + p\frac{i}{2M}$$

per $i = 0, 1, ..., 2M-1$

$$p_{i,i+1} = p\frac{2M-i}{2M};$$

per $i = 1, ..., 2M$

$$p_{i,i-1} = q\frac{i}{2M};$$

le altre transizioni hanno probabilità nulla.

c) Il grafo è costituito dai nodi $0, 1, ..., 2M$ disposti linearmente; gli archi connettono ciascun nodo con sè stesso, con il precedente e con il successivo.

d) La catena è irriducibile e regolare in quanto, per ogni coppia di stati, esiste un camino di lunghezza al più uguale a $2M$ e di probabilità positiva che porta dal primo stato al secondo.

e) In ogni caso, per il precedente punto d), esiste un'unica distribuzione invariante. Nel caso $M = 2$, $p = \frac{2}{3}$, le coordinate di tale distribuzione invariante sono fornite dal sistema

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{12}\pi_0 \\
\pi_1 &= \tfrac{2}{3}\pi_0 + \tfrac{5}{12}\pi_1 + \tfrac{1}{6}\pi_2 \\
\pi_2 &= \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{1}{4}\pi_3 \qquad . \\
\pi_3 &= \tfrac{1}{3}\pi_2 + \tfrac{7}{12}\pi_2 + \tfrac{1}{3}\pi_4 \\
\pi_0 + \pi_1 &+ \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1
\end{aligned}$$

Le prime quattro equazioni ci permettono, in particolare, di esprimere $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ come multipli di π_0; π_0 viene ricavato imponendo l'ultima equazione (condizione di normalizzazione). Si ottiene

$$\pi_0 = \frac{1}{81}, \pi_1 = \frac{8}{81}, \pi_2 = \frac{24}{81}, \pi_3 = \frac{32}{81}, \pi_4 = \frac{16}{81}.$$

Tale distribuzione concide con una binomiale di parametri $n = 4, p = \frac{2}{3}$.

Si sarebbe potuto anche pervenire tramite ragionamenti euristici a ipotizzare tale ultima conclusione e poi controllarne formalmente la proprietà di essere la distribuzione invariante, verificando la validità delle equazioni del *bilancio dettagliato*.

f) Come menzionato nel punto precedente questa distribuzione invariante risulta anche reversibile.

g)

$$\mathbb{P}\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4\} =$$

$$= \pi_0 \cdot p_{0,1} \cdot p_{1,2} \cdot p_{2,3} \cdot p_{3,4} = \frac{1}{4374}.$$

Con calcoli analoghi si ottiene anche

$$\mathbb{P}\{X_0 = 4, X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0\} = \frac{1}{4374}.$$

Di fatto non sarebbe necessario svolgere i calcoli: in virtù del precedente punto f), il comportamento della catena è temporalmente reversibile sotto la condizione che la distribuzione iniziale coincide con la distribuzione invariante e quindi deve valere l'uguaglianza

$$\mathbb{P}\{X_0 = 4, X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0\} = \mathbb{P}\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4\}.$$