Laurea Triennale in Matematica
Corso di Probabilità 2
A.A. 2015/2016 secondo semestre
Docente: F. Spizzichino
Programma d'esame

Parte 1. Generalità sulle distribuzioni di probabilità sulla retta

Richiami preliminari sulle nozione fondamentali della probabilità discreta. Cenni su insiemi di Borél e misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$. Additività finita e additività numerabile. Continuità della probabilità. Sigma-algebre di sottoinsiemi, misure di probabilità, spazi di probabilità, variabili aleatorie. Sigma-algebra generata da una famiglia di sottoinsiemi, sigma-algebra generata da una variabile aleatoria. Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria; proprietà caratterizzanti di una funzione di ripartizione. Significato probabilistico dei punti di discontinuità di una funzione di ripartizione. Funzioni di densità di probabilità sulla retta e primi esempi; costante di normalizzazione. Funzioni di ripartizione nei casi discreto, assolutamente continuo e singolare (funzione di ripartizione continua, senza densità); esempio della funzione di Cantor. Enunciato del teorema di decomposizione di Lebesgue. Distribuzioni di probabilità di trasformazioni monotone di variabili aleatorie. Valore atteso di una variabile aleatoria; caso discreto e caso assolut. continuo. Cenno all'integrale di Stiltjes. Proprietà fondamentali del valore atteso. Varianza e sue proprietà fondamentali.

Parte 2. Generalità sulle distribuzioni congiunte

Funzioni di di ripartizione e funzioni di densità congiunte per vettori di variabili aleatorie. Funzioni di ripartizione e funzioni di densità marginali. Densità condizionate. Formula di Bayes per densità; costante di normalizzazione. Funzioni di regressione e rette di regressione. Indipendenza stocastica fra variabili aleatorie; caso generale e caso assolut. continuo. Somme di variabili aleatorie e convoluzioni di densità. Covarianza e coefficiente di correlazione. Varianza di una somma di più variabili aleatorie. Cambiamento di densità congiunte sotto trasformazioni regolari.

Parte 3. Modelli probabilistici univariati notevoli

Richiami su famiglie notevoli di distribuzioni di probabilità discrete. Famiglie notevoli di distribuzioni di probabilità assolut. continue: *uniformi su intervalli, esponenziali, gamma, gaussiane, chi-quadro, Cauchy, t di Student, Weibull, lognormali, beta, Pareto*. Loro proprietà fondamentali; valori attesi e varianze. Variabili standardizzate. Funzione di rischio. Funzione quantile. Cenno ai numeri casuali e al problema della generazione di variabili aleatorie con distribuzione assegnata.

Parte 4. Questioni circa vettori di variabili gaussiane

Trasformazione di Box e Muller e generazione di variabili aleatorie gaussiane. Distribuzioni gaussiane in due dimensioni; loro leggi marginali, condizionate e coefficiente di correlazione. Rette di regressione. Trasformazioni lineari invertibili di vettori gaussiani in due dimensioni. Cenno al caso n > 2. Trasformazioni ortogonali di vettori di variabili gaussiane indipendenti con identica varianza. Teorema di Cochran e intervalli di fiducia.

Parte 5. Teorema centrale del limite e funzioni caratteristiche

Enunciato del teorema centrale del limite (Lindbeg-Lévy) per variabili i.i.d. con varianza finita. Applicazioni del torema di Lindbeg-Lévy e approssimazioni gaussiane. Definizione e proprietà fondamentali della funzione caratteristica associata ad una distribuzione di probabilità sulla retta. Funzione cararatteristica della somma di variabili indipendenti; funzione caratteristica e momenti della distribuzione. Funzione caratteristica di distribuzioni notevoli (degeneri, binomiali, Poisson, geometriche, gaussiane, esponenziali, esponenziali bilatere). Proprietà di stabilità della famiglia delle distribuzioni gaussiane. Enunciato del teorema di continuità. Enunciato del teorema di inversione. Schema della dimostrazione del teorema centrale. ► Formula di inversione di Fourier per funzioni caratteristiche di modulo integrabile. Distribuzione di Cauchy: sua funzione caratteristica e proprietà di stabilità rispetto alla somma. Cenni alle distribuzioni stabili e al relativo comportamento delle medie aritmetiche di variabili i.i.d. ◄.

Parte 6. Processi di Poisson e statistiche ordinate

Processi di Poisson omogenei; distribuzioni marginali e congiunte per gli intertempi e per i tempi di arrivo. Distribuzioni marginali e congiunte per il valore del processo ad un tempo e a più tempi. Statistiche d'ordine dalla legge uniforme, partizioni casuali di intervalli, distribuzioni beta. Distribuzioni condizionate di variabili i.i.d esponenziali data la loro somma. ► Proprietà di "statistica ordinata" ◄.

Parte 7. Catene di Markov a spazio degli stati finito

Nozioni fondamentali: spazio degli stati, proprietà di Markov, caso temporalmente omogeneo, matrice delle probabilità di transizione; matrici stocastiche. Matrici delle probabilità di transizione in più passi; equazioni di Chapman-Kolmogorov. Distribuzione iniziale, distribuzione dello stato della catena al passo n. Distribuzione congiunta degli stati della catena in k passi distinti. Stati assorbenti, classi chiuse. Distribuzioni invarianti, distribuzioni reversibili, distribuzioni dí equilibrio. Catene irriducibili e catene regolari. Criterio di regolarità. Teorema di Markov-Kakutani. Teorema di Markov per catene regolari (dimostrazione facoltativa). Unicità della distribuzione invariante per catene irriducibili. Esempi notevoli. Modello dell'urna di Ehrenfest e reversibilità temporale. ► Dimostrazione teorema di Markov. Algoritmo di Metropolis. Simulazione di una distribuzione di probabilità assegnata su un insieme finito. ◄

Modalità dell'esame

L'esame consiste in una prova scritta ed una successiva prova orale.

A scelta del candidato, una domanda nella prova orale verterà su uno dei tre argomenti rispettivamente contenuti nelle parti 5, 6 e 7 ed indicati dai simboli ► ◄.

Testi di riferimento

P. Baldi, *Calcolo delle Probabilità.* McGraw-Hill (2007)

M. Piccioni, *Probabilità di Base.* Aracne (2010)

S. M. Ross, *Calcolo delle Probabilità.* Apogeo (2004)

F. Spizzichino, *Appunti di Probabilità.* A.A. 2015/2016. In rete su pagina web docente

Altri possibili testi di consultazione per approfondimenti e argomenti facoltativi

P. Bremaud, *Markov Chains.* Springer (1999).

P. Billingsley, *Probability and Measure.* Third edition. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics (1995).

G. Dall'Aglio, *Introduzione al Calcolo delle Probabilità.* Zanichelli (varie edizioni).

W. Feller, *An Introduction to Probability and its Applications.* Volume II. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics (1970).

G. Koch, *La Matematica del Probabile*, Aracne (1997).