Laurea Triennale in Matematica, Università "La Sapienza"
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
FOGLIO ESERCIZI N. 6 (Assegnato 23 Maggio 2016)

Argomento: Somme di variabili gaussiane, teorema centrale del limite e approssimazione gaussiana

---

Esercizio 1. $X_1, X_2, ...$ è una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0,4)$ e poniamo

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Determinare l'insieme degli indici n per cui risulti $\mathbb{P}\{\frac{|S_n|}{n} < \frac{1}{16}\} \geq 0.8$.

Esercizio 2. 256 candidati sono prenotati per partecipare ad una prova scritta. Tenendo conto di mancate partecipazioni allo scritto, decisioni di non consegnare, etc..., per ciascun candidato si valuta $p = 3/4$ la probabilità che consegni una prova scritta valida. Si suppone inoltre l'indipendenza stocastica fra i diversi candidati. Si indichi con M il numero degli scritti che verranno consegnati.

a) Scrivere un'espressione esatta per la probabilità

$$\mathbb{P}\{180 < M < 204\}$$

b) Fornire, per tale probabilità, un'approssimazione basata sull'applicazione del teorema centrale del limite.

Esercizio 3. Siano $X_1, ..., X_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$ e $Y_1, ..., Y_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,1]$. Siano inoltre le due successioni stocasticamente indipendenti. Definiamo le variabili aleatorie binarie

$$U_j := \mathbf{1}_{\{X_j < Y_j\}}, j = 1, ..., 100$$

e poniamo

$$S_{100} := \sum_{j=1}^{100} U_j$$

Calcolare un valore approssimato per la probabilità

$$\mathbb{P}\{0.35 < \frac{S_{100}}{100} < 0.38\}.$$

Esercizio 4. $X_1, X_2, ...X_{36}$ sono variabili aleatorie i.i.d. con funzione di ripartizione data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 1 \\ 2\log x & \text{per } 1 < x \leq e^{\frac{1}{2}} \\ 1 & x > e^{\frac{1}{2}} \end{cases}.$$

Utilizzando il teorema centrale del limite, calcolare il valore approssimato per

$$\mathbb{P}\{2981 < \prod_{j=1}^{36} X_j < 22026\}.$$

Esercizio 5. Sia m un qualunque numero naturale per cui sia possibile costruire un dado a m facce perfettamente equilibrato. Siano $X_1, X_2, ...$ i risultati ottenuti nei successivi lanci del dado e poniamo $S_{100} := \sum_{j=1}^{100} X_j$. Calcolare l'approssimazione gaussiana per la probabilità

$$\mathbb{P}\{\frac{m+1}{2} - \frac{1}{10} \leq \frac{S_{100}}{100} \leq \frac{m+1}{2} + \frac{1}{10}\}.$$

Esercizio 6. 50 persone sono in fila davanti ad uno sportello. Il tempo di servizio per ciascuna persona è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$ e si suppone che i successivi tempi di servizio siano indipendenti.

Indicando con T il tempo necessario per smaltire la fila, calcolare l'approssimazione gaussiana per la probabilità

$$\mathbb{P}\{1.9 \leq \frac{T}{50} \leq 2.1\}.$$

Esercizio 7. Un modello di cellulare viene venduto con una batteria installata ed una batteria di riserva. Si suppone che i tempi di durata delle batterie - misurati in ore - sono variabili aleatorie indipendenti, con distribuzione $G(2; 0.0002)$. Si indichi con T il tempo di funzionamento - misurato in ore- realizzato dalle batterie del cellulare, presupponendo che, esaurita la prima batteria, essa venga subito sostituita con la seconda (che, fino al momento dell'installazione, viene conservata in modo da rimanere praticamente nuova).

a) Calcolare $\mathbb{P}\{T > 10000\}$

b) Consideriamo 100 esemplari di tale modello ed indichiamo con M la proporzione di quelli per cui tali tempi complessivi di funzionamento superino la quota di 10.000 ore. Calcolare l'approssimazione gaussiana per la probabilità :

$$\mathbb{P}\{0.8 \leq M \leq 0.914\}.$$

Esercizio 8. Siano X_1, X_2, X_3, X_4 variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione gaussiana standard e poniamo

$$Y_1 = X_1^2 + X_2^2, Y_2 = X_3^2 + X_4^2, W = 4(Y_1 - Y_2).$$

a) Determinare la distribuzione di probabilità di W

b) Determinare il valore atteso, la varianza e la funzione caratteristica di W

c) Siano $W_1, ..., W_{64}$ variabili aleatorie i.i.d. con la stessa distribuzione di probabilità di W. Calcolare l'approssimazione gaussiana per la probabilità

$$\mathbb{P}\{-0.90652 \leq \frac{\sum_{j=1}^{64} W_j}{64} \leq 0.90652\}$$

Esercizio 9. Siano X_1, X_2 due variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione gaussiana $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

a) Determinare, in funzione di μ e σ^2, due valori $\alpha\left(\mu, \sigma^2\right), \beta\left(\mu, \sigma^2\right)$ tali che risulti

$$\mathbb{P}\{\alpha \leq \frac{X_1 + X_2}{2} \leq \beta\} = 0.9,$$

qualunque sia $\mu \in \mathbb{R}$.

b) Si supponga di non conoscere il valore di σ^2. Determinare, in funzione di μ, due valori $\gamma\left(\mu\right), \delta\left(\mu\right)$ tali che risulti

$$\mathbb{P}\{\gamma\left(\mu\right) \leq \frac{X_1 + X_2}{2} \leq \delta\left(\mu\right)\} = 0.9$$

qualunque siano $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$.