Laurea Triennale in Matematica, Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
FOGLIO ESERCIZI N. 5
(Assegnato 12 Maggio 2016)

Argomento: Catene di Markov

1) La successione $X_0, X_1, X_{2,...}$ costituisce un catena di Markov con spazio degli stati $\{1, 2, 3\}$ e matrice di probabilità di transizione P specificata dalla seguente posizione

$$p_{11} = p_{13} = p_{21} = p_{23} = p_{31} = p_{33} = 1/4.$$

a) Disegnare il grafo delle probabilità di transizione
b) Determinare la matrice $P^{(2)}$ delle probabilità di transizione in due passi
c) Determinare la distribuzione invariante per P e per $P^{(2)}$.
d) Per una generica matrice stocastica P su uno spazio finito, discutere le relazioni in generale esistenti fra le famiglie delle distribuzioni invarianti per P e P^2, rispettivamente.

2) La successione $X_0, X_1, X_2, ...$ costituisce un catena di Markov con spazio degli stati $\{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di probabilità di transizione *bistocastica* P specificata dalle seguenti posizioni

$$\begin{array}{ccc} p_{11} = 0 & p_{12} = 2/3 & p_{13} = 1/3 \\ p_{21} = 2/3 & p_{22} = 0 & p_{24} = 0 \\ p_{31} = 0 & p_{32} = 1/3 & p_{33} = 0 \end{array}$$

a) Specificare se la catena è irriducibile, e se è regolare
b) Specificare se anche la matrice $P^{(2)}$ è bistocastica
c) Determinare la distribuzione invariante per P
Si fissi ora la distribuzione iniziale uguale alla distribuzione invariante
d) Trovare la distribuzione congiunta di X_6, X_7, X_8
e) Trovare la distribuzione condizionata di X_7, dato l'evento $(X_8 = 4)$.

3) Siano p_{11} e p_{22} gli elementi sulla diagonale principale di una matrice di transizione P per una catena di Markov sullo spazio degli stati $E = \{1, 2\}$. Sotto quali condizioni $P^{(2)}$ è bistocastica?

4) Una catena di Markov con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ ha matrice di transizione P data da

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale $\pi(0) = (1/2, 0, 1/2)$. Calcolare le distribuzioni $\pi(1)$, $\pi(2)$, $\pi(3)$.

5) Si consideri il seguente modello di estrazioni casuali *con doppio reinserimento*. Un'urna inizialmente contiene una pallina blu ed una verde. Ad ogni unità di tempo viene estratta una pallina con le seguenti modalità:

i) l'estrazione è casuale (ogni pallina presente nell'urna al momento dell'estrazione ha uguale probabilità di essere estratta, indipendentemente dal suo colore)

ii) prima della successiva estrazione, la pallina appena estratta viene reimbussolata insieme ad un'altra dello stesso colore.

Si indichi con X_n il numero delle palline blu presenti nell'urna al tempo n.

a) dimostrare che $\{X_n\}_{n=0,1,\ldots}$è una catena di Markov

b) trovare le probabilità di transizione

6) In un ufficio c'è uno sportello chiuso. Ogni unità di tempo arriva una persone e si mette in fila. Tra un arrivo e l'altro dovrebbe intervenire un impiegato per avvertire che lo sportello resterà chiuso; ma ciò in verità avviene soltanto con probabilità $p < 1$.

Quando l'impiegato arriva, tutte le persone in fila vanno via.

Quando vi sono esattamente 10 persone in fila, nessun altro si aggiunge alla fila.

Sia X_n il numero di persone in fila al tempo n;

a) dimostrare che $\{X_n\}_{n=0,1,\ldots}$è una catena di Markov

b) trovare le probabilità di transizione

c) trovare la distribuzione invariante per la catena

7) Su un piccolo scaffale di una biblioteca (diviso nei tre scomparti $1, 2$, e 3) vengono iniziamente disposti i tre volumi (A, B e C) di una Enciclopedia. Ogni giorno l'addetto alle pulizie si diverte a scambiare di posto due tra i tre volumi. Siano X_n, Y_n, Z_n i volumi che rispettivamente occupano i tre scomparti, nel giorno n.

La terna (X_n, Y_n, Z_n) è una catena di Markov a valori nell'insieme delle permutazioni di (A, B, C).

(a) Si determini la matrice di transizione P e si disegni il grafo corrispondente

(b) Si determini la distribuzione stazionaria e la matrice di transizione in due passi

(c) Verificare che, se la distribuzione iniziale della catena è la distribuzione stazionaria, allora le variabili della successione $\{X_n\}$ sono uniformemente distribuite in (A, B, C).

8) Si consideri un punto che si muove sui vertici del quadrato di vertici $(0; 0), (1; 1), (0; 1)$ e $(1; 0)$ nel modo seguente. Ad ogni istante il punto si sposta sul vertice orizzontalmente adiacente con probabilità p, sul vertice verticalmente adiacente con probabilità q, e sul vertice opposto con probabilità r (dove $p + q + r = 1$) indipendentemente dalle posizioni occupate in precedenza.

Si verifica immediatamente che la successione $\{Z_n\}_{n=0,1,\ldots}$ delle posizioni progressivamente occupate dal punto è una catena di Markov.

(a) Si determini la matrice di transizione in uno e due passi;

(b) Si determini la distribuzione stazionaria

(c) Sia ora $Z_n = (X_n, Y_n)$. Che cosa si può dire circa le successioni aleatorie $\{X_n\}_{n=0,1,\dots}$, $\{Y_n\}_{n=0,1,\dots}$?

9) Una catena di Markov $\{X_n\}_{n=0,1,\dots}$ ha spazio degli stati $E = \{0; 1; 2; 3\}$.

Quando la catena si trova nello stato 0 sceglie a caso lo stato successivo tra gli stati $1, 2$ e 3.

Quando si trova in uno di questi tre stati, invece, la catena sceglie come stato successivo 0 con probabilità p, altrimenti rimane nello stato di partenza.

(a) Calcolare le probabilità di transizione in due passi $P(X_2 = j|X_0 = i)$ per $i, j \in E$.

(b) Determinare la distribuzione stazionaria e il limite delle probabilità di transizione $P(X_{n+2} = j|X_0 = i)$, quando n tende all'infinito;

(c) Prendendo come distribuzione iniziale la distribuzione stazionaria della catena, calcolare $P\left(X_2 = 1, X_0 = 2|X_1 = 0\right)$.

10) Una catena di Markov sullo spazio degli stati $\{1, 2, 3\}$ ha matrice delle probabilità di transizione tale che

$$p_{11} = 0.5, p_{12} = 0.3, p_{21} = 0.25, p_{23} = 0.25, p_{32} = 0.3, p_{33} = 0.5$$

a) Rappresentare tale matrice attraverso un grafo

b) Calcolare la matrice delle probabilità di transizione in due passi

c) Calcolare la distribuzione invariante

d) Calcolare la probabilità che la catena si trovi nello stato 3 sia al passo 7 che al passo 8, assumendo che la distribuzione iniziale coincida con la distribuzione invariante.

11) Consideriamo una catena di Markov sullo spazio degli stati $\{1, 2\}$ con matrice di transizione tale che $p_{12} \cdot p_{21} > 0$. Provare che la distribuzione invariante è anche reversibile.

12) Consideriamo la matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix}$$

a) Stabilire se P è irriducibile e se P è regolare.

b) Dire se esiste una distribuzione di probabilità iniziale v tale che la successione vP^n sia non convergente;

c) Indicare una distribuzione di probabilità iniziale w tale che la successione wP^n sia convergente.