Laurea Triennale in Matematica, Università La Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
Prova di Esonero 2 Maggio 2016
Soluzione degli esercizi proposti

1. In quanto segue $Z_1, Z_2, ...$ sono variabili aleatorie gaussiane standard indipendenti e $Y_1 := Z_1^2, Y_2 := Z_2^2, ...$

a) Calcolare la probabilità

$$\mathbb{P}\left(1 \leq \frac{Z_1 + 2Z_2 + 3Z_3}{3} \leq 3\right).$$

b) Calcolare la probabilità condizionata

$$\mathbb{P}\left(-1 \leq 2Z_1 - Z_2 \leq -\frac{3}{5} | Z_1 - 2Z_2 = -1\right).$$

c) Ponendo $V_1 = Y_1 + Y_2$, $V_2 = Y_2 + Y_3$, calcolare la covarianza ed il coefficiente di correlazione fra V_1 e V_2.

d) Poniamo

$$X_1 := V_1 = Y_1 + Y_2; \quad X_2 : Y_3 + Y_4; ...; \quad X_k := Y_{2k-1} + Y_{2k}, ...$$

Sia inoltre X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di valore atteso $\frac{1}{3}$, e indipendente da $X_1, X_2, ...$.

Calcolare la probabilità che valga $(X > X_k)$ per *almeno* un indice k, con $1 \leq k \leq 3$.

Soluzione

a) Essendo Z_1, Z_2, Z_3 variabili gaussiane indipendenti, anche la variabile $\frac{Z_1+2Z_2+3Z_3}{3}$ è gaussiana.

Notiamo che per giungere a questa conclusione non é necessario, neanche possibile, invocare il Teorema di Lindberg-Lévy (che è un risultato asintotico e riguarda il caso in cui gli addendi siano indipendenti, ma non gaussiani).

Il valore atteso di $\frac{Z_1+2Z_2+3Z_3}{3}$ è $\mathbb{E}\left(\frac{Z_1+2Z_2+3Z_3}{3}\right) = 0$ e la sua varianza è $\frac{14}{9}$. Quindi la distribuzione di probabilità di $\frac{Z_1+2Z_2+3Z_3}{3}$ coincide con quella della variabile aleatoria $\frac{\sqrt{14}}{3}Z$, indicando con Z una variabile aleatoria fittizia distribuita secondo una gaussiana standard. Dunque, utilizzando le tavole della funzione di ripartizione gaussiana standard Φ,

$$\mathbb{P}\left(1 \leq \frac{Z_1 + 2Z_2 + 3Z_3}{3} \leq 3\right) = \mathbb{P}\left(\frac{3}{\sqrt{14}} \leq Z \leq \frac{9}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\simeq \Phi(2.4054) - \Phi(0.80178) \simeq 0.2039.$$

b) La coppia delle variabili aleatorie $(2Z_1 - Z_2)$ e $(Z_1 - 2Z_2)$ è distribuita secondo una distribuzione gaussiana bidimensionale $\mathcal{N}\left(0, 0; 5, 5; \frac{4}{5}\right)$. Se ne deduce che la probabilità condizionata di $2Z_1 - Z_2$, data un'osservazione della forma $(Z_1 - 2Z_2 = u)$, è una distribuzione (unidimensionale) gaussiana $\mathcal{N}\left(\beta(u), 5\left(1 - \frac{16}{25}\right)\right)$ con

$$\beta(u) = \mathbb{E}\left(2Z_1 - Z_2\right) + \frac{4}{5}\frac{\sigma_u}{\sigma_v}u = \frac{4}{5}u$$

per ogni $u \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\mathbb{P}\left(-1 \leq 2Z_1 - Z_2 \leq -\frac{3}{5}|Z_1 - 2Z_2 = -1\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(-1 \leq -\frac{4}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}Z \leq -\frac{3}{5}\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{5}}{15} \leq Z \leq \frac{\sqrt{5}}{15}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{5}}{15}\right) - 1.$$

Dunque, utilizzando di nuovo le tavole della funzione Φ,

$$\mathbb{P}\left(-1 \leq 2Z_1 - Z_2 \leq -\frac{3}{5}|Z_1 - 2Z_2 = -1\right) = 2\Phi\left(0.149\,07\right) - 1 \backsimeq 0.112.$$

c) Notiamo che le Y_h, essendo distribuite secondo una gamma $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, hanno varianza $Var(Y_h) = 2$.

Quindi $Var(V_h) = 4$, mentre

$$Cov(V_1, V_2) = Cov(Y_1 + Y_2, Y_2 + Y_3);$$

dunque, tenendo conto della proprietà di bilinearità delle covarianze e dell'indipendenza stocastica fra Y_1, Y_2, Y_3,

$$Cov(V_1, V_2) = Var(Y_2) = 2.$$

Possiamo concludere

$$\rho(V_1, V_2) = \frac{Cov(V_1, V_2)}{\sqrt{Var(V_1) \cdot Var(V_2)}} = \frac{1}{2}.$$

d) Ovviamente gli eventi $(X > X_1), (X > X_2), (X > X_3)$ non possono essere a due a due incompatibili; dunque la probabilità della loro unione non si può calcolare come somma delle tre singole probabilità. Tali eventi non sono neanche indipendenti e quindi non è conveniente utilizzare la formula di inclusione-esclusione. Il calcolo risulta tuttavia molto semplice, ragionando come segue. Osserviamo innanzitutto che, ponendo

$$W := \min\left(X_1, X_2, X_3\right),$$

la probabilità cercata coincide con

$$\mathbb{P}(W < X).$$

Notiamo inoltre che X segue una distribuzione esponenziale di parametro 3, mentre$X_1, X_2, ...$ sono variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con distribuzione esponenziale di parametro $\theta = \frac{1}{2}$. Dunque W segue una distribuzione esponenziale $\mathcal{E}\left(\frac{3}{2}\right)$, (ed è stocasticamente indipendente da X). Dunque

$$\mathbb{P}(W < X) = \int_0^{+\infty} f_W(w)\left[\int_w^{+\infty} f_X(x)dx\right]dw =$$
$$\frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \exp\{-\frac{3}{2}w\}\cdot[\exp\{-3w\}]\,dw = \frac{1}{3}.$$

2. Per ogni $t \geq 0$, indichiamo con N_t la variabile aleatoria a valori interi non negativi data da

$$N_t = \sup\{n|\sum_{k=1}^{n} X_k \leq t\}.$$

Per $n = 0, 1, ...$, calcolare la probabilità condizionata

$$\mathbb{P}\left(N_{\frac{t}{2}} = n|N_t = n\right).$$

Soluzione
Scriviamo innanzitutto

$$\mathbb{P}\left(N_{\frac{t}{2}} = n|N_t = n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(N_{\frac{t}{2}} = n\right)\mathbb{P}\left(N_t = n|N_{\frac{t}{2}} = n\right)}{\mathbb{P}(N_t = n)}.$$

Nel corso della soluzione del precedente esercizio, abbiamo notato che $X_1, X_2, ...$ sono variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con distribuzione esponenziale di parametro $\theta = \frac{1}{2}$. Dunque il processo stocastico $\{N_t\}_{t\geq 0}$ è un processo di Poisson di intensità $\mu = \frac{1}{2}$ e le probabilità $\mathbb{P}\left(N_{\frac{t}{2}} = n\right), \mathbb{P}(N_t = n), \mathbb{P}\left(N_t = n|N_{\frac{t}{2}} = n\right)$ sono tutte probabilità di Poisson. Si ha, più precisamente,

$$\mathbb{P}\left(N_{\frac{t}{2}} = n|N_t = n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(N_{\frac{t}{2}} = n\right)\mathbb{P}\left(N_t = n|N_{\frac{t}{2}} = n\right)}{\mathbb{P}(N_t = n)}$$
$$= \frac{\exp\{-\frac{t}{4}\}\left(\frac{t}{4}\right)^n n!}{n!\exp\{-\frac{t}{2}\}\left(\frac{t}{2}\right)^n}\cdot\exp\{-\frac{t}{4}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. Siano X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di valore atteso 1, Θ una variabile aleatoria con distribuzione gamma $G(n, 1)$, Θ ed X indipendenti, e sia $M = \frac{X}{\Theta}$.

a) Determinare la funzione di densità congiunta della coppia (Θ, M);
b) Determinare la funzione di densità marginale della variabile M;
c) Per $m > 0$, determinare la densità condizionata della variabile Θ data l'osservazione $(M = m)$.

Soluzione
a) Sul dominio $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ consideriamo la trasformazione

$$\begin{array}{c} \theta = \theta \\ m = \frac{x}{\theta} \end{array}$$

e la trasformazione inversa

$$\begin{array}{c} \theta = \theta \\ x = \theta \cdot m \end{array},$$

il cui determinante jacobiano $J(\theta, m)$ ha modulo identicamente uguale a θ. Possiamo scrivere, per $\theta > 0, m > 0$,

$$f_{\Theta,M}(\theta, m) = f_{\Theta,X}(\theta, \theta \cdot m) \, |J(\theta, m)| =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \theta^n \exp\{-\theta (1+m)\}.$$

b) Per $m > 0$,

$$f_M(m) = \int_0^{+\infty} f_{\Theta,M}(\theta, m) \, d\theta =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \theta^n \exp\{-\theta (1+m)\} d\theta$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} n! \frac{1}{(1+m)^{n+1}} = \frac{n}{(1+m)^{n+1}}.$$

c)

$$f_\Theta(\theta | M = m) = \frac{f_{\Theta,M}(\theta, m)}{f_M(m)} = \frac{(1+m)^{n+1}}{n!} \theta^n \exp\{-\theta (1+m)\}.$$

Cioè la distribuzione condizionata di Θ data l'osservazione $(M = m)$ è ancora una distribuzione gamma (come la marginale di Θ), ma con nuovi parametri $\alpha = n + 1$ e $\beta = 1 + m$. Notiamo anche che, per $\theta > 0$, la distribuzione condizionata di M dato $(\Theta = \theta)$ è un'esponenziale $\mathcal{E}(\theta)$. Il risultato qui trovato è utile nell'ambito della Statistica matematica.