Laurea Triennale in Matematica, Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
FOGLIO ESERCIZI N. 4 (Assegnato 26 Aprile 2016)

Argomento: Variabili aleatorie gaussiane

Esercizio 1. Uno strumento di misura è soggetto ad un errore casuale $\mathcal{E}$, la cui distribuzione è influenzata dal sussistere o meno di una certa situazione ambientale H, durante la misurazione. Più precisamente: al verificarsi di H, $\mathcal{E}$ segue una distribuzione $\mathcal{N}(0, 1/4)$ e al non verificarsi di H, $\mathcal{E}$ segue una distribuzione $N(0, 1/9)$. Si suppone che il verificarsi di H non sia direttamente osservabile e si valuta $P(H) = 0,2$. Si procede ora alla misurazione di una grandezza fisica di valore (noto) $g = 100$ e indichiamo con X il risultato della misurazione (cioè $X = 100 + \mathcal{E}$)

a) Calcolare la probabilità dell'evento $E = \{99.2 \leq X \leq 100.8\}$

b) Calcolare la probabilità condizionata $P(H|E)$.

Esercizio 2. $X_1, ..., X_{16}$ sono variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(2, 4)$.

a) Calcolare

$$P\{-2 < \frac{\sum_j^{16} X_j}{16} < 6\}$$

b) Calcolare

$$P\{-2 < \min_{1 \leq j \leq 16} X_j \leq \max_{1 \leq j \leq 16} X_j < 6\}.$$

Esercizio 3. Siano $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sia inoltre $A = (a_{i,j})$ una matrice quadrata $n \times n$ invertibile, ortogonale:

$$A^T A = I$$

essendo I la matrice identica $n \times n$. Consideriamo il vettore aleatorio $\mathbf{Y}$ definito dalla trasformazione lineare $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$.

a) Scrivere la funzione di densità congiunta di $\mathbf{X}$;

b) provare che la densità congiunta di $\mathbf{Y}$ coincide con quella di $\mathbf{X}$.

Esercizio 4. Siano $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Provare che $\sum_{j=1}^n X_j$ segue una distribuzione gaussiana, utilizzando il risultato ottenuto nel precedente Esercizio 3.

Esercizio 5. A e B sono variabili aleatorie non negative, stocasticamente indipendenti, tali che $X = logA$ e $Y = logB$ sono distribuite secondo una gaussiana standard. Poniamo $U = \frac{B}{A}$.

a) Calcolare $P\{e^{-1} \leq U \leq e\}$;

b) Scrivere la funzione di densità di U.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria con valore atteso μ_X e varianza $\sigma_X^2 < +\infty$. Sia inoltre Y un'altra variabile aleatoria tale che valga $Y = aX + b$ per un'opportuna coppia di costanti a, b con $a > 0$. Verificare che deve allora necessariamente risultare

$$Y - \mu_Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X).$$

Esercizio 7. X, Y sono due variabili aleatorie con funzione di densità congiunta gaussiana bivariata di parametri $\mu_X = 0, \mu_Y = 1; \sigma_X^2 = \sigma_X^2 = 4; \rho = \frac{1}{4}$.

a) Determinare la densità congiunta di (X, S), dove $S = X + Y$;

b) Determinare la densità marginale di S.

Esercizio 8. Siano X, Y due variabili aleatorie con distribuzioni marginali gaussiane standard, e con distribuzione congiunta gaussiana bidimensionale con coefficiente di correlazione ρ.

a) Determinare la densità congiunta di (X, V) dove $V = Y - \rho X$;

b) Calcolare la covarianza $Cov(X, V)$.

Esercizio 9. Siano X ed Y due variabili aleatorie con distribuzioni marginali gaussiane standard, e con distribuzione congiunta gaussiana bidimensionale con coefficiente di correlazione ρ. Quale condizione su ρ garantisce che siano stocasticamente indipendenti le variabili V_1 e V_2 definite dalla seguente la trasformazione

$$\begin{array}{l} V_1 = a_{11}X + a_{12}Y \\ V_2 = a_{21}X + a_{22}Y \end{array} ?$$

Esercizio 10. X ed Y sono due variabili aleatorie con distribuzione congiunta gaussiana $N\left(1, 1; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$. Calcolare $P(1 \leq Y \leq 3 | X = 0)$.

Esercizio 11. X ed Y sono due variabili aleatorie con distribuzione congiunta gaussiana, valori attesi nulli, varianze $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{9}$ rispettivamente, e con coefficiente di correlazione $\rho = 0.6$. Calcolare $P\{-1 \leq X - 2Y \leq 1 | 2X + Y = 1\}$.

Esercizio 12. X_1, X_2, X_3, X_4 sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Poniamo $Y = \max_{1 \leq j \leq 4} X_j$ e indichiamo con $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la funzione di densità congiunta di X_1, X_2, X_3, X_4.

a) Determinare σ^2 imponendo la condizione $P\{Y \leq 4\} = 0.90369$

b) In corrispondenza a tale valore di σ^2, indicare la regione in cui è soddisfatta la relazione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq c$$

essendo $c \in (0, 1)$ una costante assegnata.