Laurea Triennale in Matematica, Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
FOGLIO ESERCIZI N. 2 (Consegnato 17 Marzo 2016)
Argomento: Distribuzioni congiunte e valori attesi

Esercizio 1. X è una v.a. con distribuzione ass. continua; la sua funzione di densità di probabilità è data da

$$f_b(x) = a(b)\mathbf{1}_{\{0 \le x \le 1\}} + bx\mathbf{1}_{\{1 < x \le 2\}},$$

essendo b e $a(b)$ costanti positive. Al variare di b nell'intervallo dei suoi valori possibili, determinare il valore atteso $\mathbb{E}_b(X)$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità della forma $f(x) = Kx\mathbf{1}_{[0,2]}(x)$, essendo K la costante di normalizzazione. Sia inoltre $Y = \min(1, X)$. Determinare i valori attesi di X e di Y e la funzione di ripartizione congiunta della coppia (X, Y).

Esercizio 3. Un punto X viene scelto a caso in un'intervallo di lunghezza 2 e consideriamo la variabile aleatoria A definita come l'area del rettangolo costruito sugli intervalli determinati da X. Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}(A)$.

Esercizio 4. Siano U, V e T tre variabili aleatorie non-negative indipendenti e poniamo $X = \min(U, T), Y = \min(V, T)$. Assumendo che U e V sono identicamente distribuite con distribuzione esponenziale $Exp(\rho)$ e T distribuita con distribuzione esponenziale $Exp(2\rho)$, calcolare

a) la funzione di densità ed il valore atteso di X;
b) la funzione di sopravvivenza congiunta di X e Y;
c) $\mathbb{P}(X = Y)$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con valore atteso μ e varianza finita σ^2. Dimostrare che vale la relazione

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X - a)^2 = \sigma^2.$$

Esercizio 6. X, Y sono due variabili aleatorie con funzione di densità congiunta uniforme nel cerchio unitario C.

a) Determinare la funzione di densità marginale di X;
b) per $x \in (-1, 1)$, determinare la funzione di densità condizionata di Y dato $(X = x)$;
c) determinare la funzione di densità della variabile $R = X^2 + Y^2$.

Esercizio 7. X, Y sono due variabili aleatorie con funzione di densità congiunta uniforme nella regione A delimitata dalle rette $\{x = 0\}, \{y = 1\}$ e dalla curva $\{x^2 - y = 0\}$. Trovare la distribuzione di probabilità marginale di X.

Esercizio 8. X, Y sono due variabili aleatorie con funzione di densità congiunta data da $f(x, y) = k(c)\,(x + y)\,\mathbf{1}_{E_c}(x, y)$ dove E_c indica il triangolo individuato dagli assi cartesiani e dalla retta $x + y = c$.

a) Determinare l'insieme $\mathcal{C}$ dei possibili valori per il parametro c;

b) Determinare, per $c \in \mathcal{C}$, il valore della costante $k(c)$;

c) trovare la funzione di densità condizionata di X dato $\{Y = y\}$ $(0 < y < c)$;

d) trovare la distribuzione di probabilità ed il valore atteso di $V = X + Y$.

Esercizio 9. Siano F e G due funzioni di distribuzione di probabilità sulla retta e si consideri la funzione

$$H(x, y) = \min\left(F\left(x\right), G\left(y\right)\right).$$

a) Dimostrare che H si può vedere come funzione di ripartizione di probabilità congiunta di una coppia di variabili aleatorie X, Y;

b) determinare le due distribuzioni marginali;

c) fissata una coppia di valori $x_1 < x_2$, studiare la funzione di ripartizione condizionata $F_Y(y|x_1 < X < x_2)$;

d) trovare la funzione di distribuzione di $Z = X + Y$.

Esercizio 10. Dimostrare che la funzione

$$C(x, y) = \mathbf{1}_{\{0 \leq \min(x,y) \leq 1\}} \min\left(x, y\right) + \mathbf{1}_{\{\min(x,y) > 1\}}$$

è la funzione di ripartizione congiunta di una coppia di variabili aleatorie con distribuzione marginale $R(0, 1)$. Quale relazione sussiste fra tali due variabili?

Esercizio 11. Ispirandosi al precedente esercizio, generalizzare i punti a) e b) dell'Esercizio 9.

Esercizio 12. Una cisterna, di capacità praticamente illimitata ed inizialmente vuota, si riempie durante un temporale ad un tasso costante di 100 lt. al minuto. Non appena il temporale smette, l'acqua comincia a defluire ad un tasso costante di 50 lt. al minuto. Sia $t_0 = 0$ l'istante di inizio del temporale e sia il tempo di durata del temporale una variabile aleatoria T con distribuzione esponenziale di valore atteso $\mathbb{E}(T) = 15$ minuti. Poniamo $X =$ quantità d'acqua contenuta nella cisterna all'istante $t = 15$ minuti. Determinare la distribuzione di probabilità ed il valore atteso di X e la funzione di ripartizione congiunta di (X, T).

Esercizio 13. Siano X, Y due variabili aleatorie con funzione di densità congiunta $f(x, y)$. Dimostrare che X, Y sono stocasticamente indipendenti se e solo se esistono due funzioni non negative α e β tali che $f(x, y) = \alpha(x)\beta\,(y)$.

Esercizio 14. X, Y sono due variabili aleatorie con funzione di densità congiunta data da $f(x, y) = kxy\mathbf{1}_E(x, y)$ dove E indica il triangolo determinato dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = 1$.

a) Determinare il valore della costante k;

b) trovare la funzione di densità condizionata di X dato $\{Y = y\}$ $(0 < y < 1)$;

c) X, Y sono stocasticamente indipendenti?