

Laurea Triennale in Matematica
Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2015/2016
FOGLIO ESERCIZI N. 1 (Assegnato 8 Marzo 2016)
Funzioni di ripartizione e di densità unidimensionali

Esercizio 1. Sia $\lambda > 0$ e X una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro λ e poniamo

$$\mathbb{P}\{1 \leq X \leq 2\} = c.$$

- a) Determinare l'intervallo dei valori possibili per c , al variare di $\lambda > 0$
- b) Determinare il valore di λ in funzione di c .

Esercizio 2. X è una v.a. con distribuzione ass. continua; la sua funzione di densità di probabilità è data da

$$f(x) = \begin{cases} a & 0 \leq x \leq 1 \\ bx & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

essendo a e b costanti positive.

- a) Determinare l'intervallo dei valori possibili per b
- b) Determinare, per ogni fissato valore di b , il valore di a in funzione di b
- c) In funzione del valore di b calcolare

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right\}.$$

Esercizio 3. Sia U una variabile aleatoria con distribuzione uniforme $R[0, 1]$. Determinare $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ in modo tale che $X = \varphi(U)$ segua una distribuzione esponenziale di parametro λ .

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione assolutamente continua e *simmetrica*, cioè tale che

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(-X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinare quali condizioni debbono essere soddisfatte dalla funzione di densità di probabilità f e dalla funzione F^{-1} .

Esercizio 5. Sia U una variabile aleatoria con distribuzione uniforme $R[0, 1]$ e

$$X := \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \pi U\right).$$

Determinare la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di X .

Si tratta di una distribuzione simmetrica?

Esercizio 6. Consideriamo la funzione

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

- Verificare che si tratta di una funzione di ripartizione
- Determinare la funzione F^{-1} e la funzione di densità di probabilità f
- Si tratta di una distribuzione simmetrica?

Esercizio 7. X è una v.a. non negativa con distribuzione ass. continua e funzione di intensità assegnata $r(x)$. Scrivere la corrispondente funzione di densità di probabilità $f(x)$.

Esercizio 8. X è una v.a. con distribuzione uniforme sull'intervallo $[-2, 2]$. Calcolare la probabilità condizionata

$$\mathbb{P}\left(-2 \leq 2X \leq 2 \mid -\frac{5}{2} \leq 2X \leq \frac{5}{2}\right).$$

Esercizio 9. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = 4x^3 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Determinare a in modo tale che risulti

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq a).$$

Esercizio 10. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = k \exp\{-|x|\}, x \in \mathbb{R}.$$

- Determinare il valore della costante k
- Calcolare $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$

Esercizio 11. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = 2x \exp\{-x^2\} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Determinare la funzione di densità di probabilità di $Y = X^2$.

Esercizio 12. Un punto viene scelto a caso nell'intervallo $(0, 2)$ e consideriamo le lunghezze dei due intervalli determinati da tale punto. Trovare la distribuzione di probabilità dell'area del rettangolo costruito con tali intervalli.

Esercizio 13. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = Kx \mathbf{1}_{[0,2]}(x).$$

- Determinare il valore della costante K ;
- Determinare la funzione di ripartizione di $Y = \min(1, X)$.