A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO 9.

Esercizio 9.1. Consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[X]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

(A) Consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{Z}[X]$:

$$\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}[X] = \left\{ P \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in 2 \cdot \mathbb{Z} \right\}$$

Dimostrare che si tratta di un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.
(B) Descrivere l'anello quoziente $\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}(X)$ (determinare un sistema di rappresentanti, descrivere la moltiplicazione tra due classi in $\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}[X]$ sfruttando il sistema di rappresentanti scelto).
(C) Definiamo ora l'insieme $\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}^{\geq n}[X] = \mathbb{Z}_{\mathscr{P}}[X] \cap \mathbb{Z}^{\geq n}[X]$, dove denotiamo con $\mathbb{Z}^{\geq n}[X]$ l'insieme dei polinomi di grado $\geq n$ unito all'elemento $0 \in \mathbb{Z}$. Si tratta ancora di un ideale? Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \mathbb{Z}_{\mathscr{P}}^{\geq n}[X] = \{0\}$. [*Suggerimento. Si osservi che* $\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}^{\geq n}[X] = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{\mathscr{P}}^{\geq i}[X]$]

Esercizio 9.2. Sia A un anello unitario. Supponiamo che $a \in A$ sia un elemento invertibile di ordine finito (dunque tale che $a^n = 1_A$ per un opportuno n) e supponiamo che non sia zero di nessun polinomio $\sum_{i=0}^{j} (-1_A)^{\delta_i} X^i$ per $j < n$ con $\delta_i \in \{0, 1\}$. Mostrare che $(1_A - a)$ è un divisore di 0_A. Mostrare che se $o(a)$ è pari allora $(1_A + a)$ è un divisore di 0_A. Cosa possiamo dire di $(1_A + a)$ nel caso in cui $o(a)$ sia dispari? Si tratta anche in questo caso di un divisore di 0_A? [*Suggerimento. Sfruttare la formula per scrivere la somma/differenza di due potenze n-sime. Per l'ultima domanda si osservi che se a ha ordine dispari* a^2 *ha lo stesso ordine*]

Esercizio 9.3. Sia A un anello unitario e sia $a \in A$. Diremo che a è idempotente se $a^2 = a$.

(A) Dimostrare che un idempotente non banale (quindi $\neq 0_A, 1_A$) di A è un divisore di 0_A.
(B) Determinare due elementi idempotenti non banali in $\mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (matrici 2×2 a coefficienti reali).

Esercizio 9.4. Sia A un anello commutativo unitario. Dato un insieme $S \subseteq A$ definiamo l'annullatore dell'insieme S come segue:

$$\mathscr{A}(S) = \{a \in A \mid a \cdot s = 0_A, \forall s \in S\}$$

(A) Dimostrare che si tratta di un ideale di A. Dimostrare che $\mathscr{A}(J) \cap J = \{0_A\}$. [*Suggerimento. Sfruttare il fatto che in un anello lo zero è unico.*]
(B) Sia $J \subseteq A$ un ideale. Dimostrare che se I è un ideale e $I \cap J = \{0_A\}$, allora $I \subseteq \mathscr{A}(J)$.
(C) Dimostrare che se I e J sono due ideali propri di A tali che $I \cap J = \{0_A\}$ ed I (o J) non contiene elementi idempotenti non banali (ovvero $\neq 1_A$) allora $I + J$ è un ideale proprio di A. [*Suggerimento. Supponete per assurdo che* $1_A \in I + J$.]

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 9. 5. Consideriamo $C^0([-1,1],\mathbb{R})$, l'insieme delle funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostrare che si tratta di un anello rispetto alle operazioni:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \bullet g)(x) = \frac{f(x)\cdot g(-x) + f(-x)\cdot g(x)}{2}.$$

(A) È un anello unitario? È commutativo?
(B) In restrizione all'insieme delle funzioni pari determinare l'insieme degli elementi invertibili.
(C) Dimostrare che il sottoanello delle funzioni pari è un ideale. Dimostrare che la funzione c_1 data da $c_1(x) \equiv 1$ è un'unità in restrizione a tale ideale.
(D) Sia $f \in C^0([-1,1],\mathbb{R})$ mostrare che $f \bullet f = 0$ se e solo se

$$([-1,1] \setminus \mathrm{supp}(f)) \cup ([-1,1] \setminus \{x \in [-1,1] \mid -x \in \mathrm{supp}(f)\}) = [-1,1]$$

(E) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{C}_0 = \{f \in C^0([-1,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ è un ideale (bilatero) di $C^0([-1,1],\mathbb{R})$.

Esercizio 9.6. Calcolare l'MCD delle seguenti coppie di polinomi in $\mathbb{Z}[X]$:
(a) $P(X) = X^3 + X^2 - 2X - 2$ e $Q(X) = X^3 + X^2 - 4X - 4$.
(b) $P(X) = X^4 - 4$ e $Q(X) = 3X^{10} - 6X^8$
(c) $P(X) = X^{14} + X^{13} - X^{12} - X^{11}$ e $Q(X) = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$

Esercizio 9. 7. Sia $K[X_1,..,X_n]$ l'anello dei polinomi in n-variabili sul campo K. Denoteremo con K^n lo spazio vettoriale n-dimensionale sul campo K e denoteremo con $S \subseteq K^n$ un suo sottoinsieme. Sia $J \subseteq K[X_1,..,X_n]$ un ideale di $K[X_1,...,X_n]$. Definiamo:

$$\mathcal{I}(S) = \{P \in K[X_1,...,X_n] \mid P(y_1,..,y_n) = 0_K \text{ per ogni } (y_1,..,y_n) \in S\}$$
$$\mathcal{V}(J) = \{(y_1,..,y_n) \mid P(y_1,..,y_n) = 0_K \text{ per ogni } P \in J\}$$

(A) Dimostrare che $\mathcal{I}(S)$ è un ideale di $K[X_1,...,X_n]$.
(B) Dimostrare che dati due ideali $J_1, J_2 \subseteq K[X_1,..,X_n]$ si ha $\mathcal{V}(J_1 \cap J_2) = \mathcal{V}(J_1) \cup \mathcal{V}(J_2)$.
[*Suggerimento. Un'inclusione è facile. La seconda si ottiene ragionando per assurdo*]
(C) Dimostrare che dati due ideali $J_1, J_2 \subseteq K[X_1,..,X_n]$ si ha $\mathcal{V}(J_1 + J_2) = \mathcal{V}(J_1) \cap \mathcal{V}(J_2)$.