A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO 8.

Esercizio 8.1. Siano n, $m \in \mathbb{N}$ due numeri naturali tali che $\mathrm{MCD}(n, m) = 1$; dimostrare che il gruppo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ è un gruppo ciclico.

Esercizio 8.2. Determinare le possibili strutture cicliche ed i possibili ordini degli elementi di S_7.

Esercizio 8.3. Consideriamo il gruppo diedrale D_n. Numeriamo da 1 ad n i vertici (che chiameremo dunque v_1,...,v_n) dell'n-gono regolare, $\mathcal{P}_n$, procedendo in senso antiorario e denotiamo con ℓ_i il lato dell' n-gono regolare compreso tra v_i e v_{i+1} per $i = 1, .., n-1$ ed ℓ_n il lato compreso tra v_n e v_1. Denotiamo con $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ la rotazione di $\frac{2\pi}{n}$ intorno all'origine e denotiamo con $\sigma_{\ell,\,i}$ e $\sigma_{v,\,i}$ rispettivamente le riflessioni rispetto agli assi dei lati ℓ_i e rispetto alle rette contenenti $\overline{ov_i}$ (o è l'origine del piano euclideo).

(A) Dimostrare che se n è dispari allora per $j(i, n)$ uguale ad un rappresentante compreso tra 1 ed n della classe resto modulo n di $\frac{n-1}{2} + i$ si ha: $\sigma_{v,\,i} = \sigma_{\ell,\,j(i,n)}$.
(B) Dimostrare che se n è dispari allora $\sigma_{v,\,j(i,n)} \circ \sigma_{v,\,i} = \rho_{-\frac{2\pi}{n}}$ mentre $\sigma_{v,\,i} \circ \sigma_{v,\,i+1} = \rho_{\frac{4\pi}{n}}$.
(C) Dimostrare che se n è pari ogni $\{\sigma_{v,\,i},\, \sigma_{\ell,j}\}_{i,j=1}^{\frac{n}{2}}$ costituisce un insieme di isometrie di $\mathcal{P}_n$ a due a due distinte. Dimostrare che $\sigma_{\ell,\,i} \circ \sigma_{v,\,i} = \rho_{\frac{2\pi}{n}}$.

Esercizio 8. 4. Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ il sottoinsieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Denotiamo con $+$ e $\circ$ le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x)\,, \qquad && f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x))\,, && f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(A) Dimostrare che su $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'operazione $\circ$ non è distributiva rispetto alla somma . Verificare che esiste un'unità in $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ rispetto a tale prodotto.
(B) Determinare l'insieme degli invertibili di $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(C) Verificare che $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un sottogruppo additivo chiuso rispetto al prodotto.
(D) Verificare che l'insieme $\mathcal{F}^+$ delle funzioni di $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ a valori in $\mathbb{R}^+$ è tale che $\mathcal{F}^+ \circ \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}^+$ ma che non è un sottogruppo rispetto alla somma.
(E) Verificare che $\mathcal{C} \simeq \mathbb{R}$, l'insieme delle funzioni costanti è un sottogruppo rispetto alla somma tale che $\mathcal{C} \circ \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{C}$.

Esercizio 8. 5. Sia A un anello (unitario). Siano I, $J \subset A$ due ideali e K_1, $K_2 \subset A$ due sottoanelli (ma non ideali).
(A) Verificare che $(I + K_1)$ è un sottoanello;
(B) Dimostrare che $K_1 + K_2$ è un sottoanello se e soltanto se $(K_1\, K_2 + K_2\, K_1) \subset K_1 + K_2$;
(C) Sia ora $J \subset K_1$ e supponiamo che $(I + K_1)/J = (I + J)/J$. Dimostrare che allora K_1/J è un sottoanello di I/J.

Esercizio 8. 6. Sia A un anello (unitario). Sia $K \subset A$ un sottoanello e siano $I, J \subseteq A$ due ideali. Supponiamo che:
(1) $J \leq K$;
(2) $(I + K)/I = (I + J)/I$;
(3) $I \cap K = I \cap J$;

Dimostrare che allora $K = J$.

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 8.7. Consideriamo S_6. Definiamo il seguente sottoinsieme di S_6:

$$T_3 = \{\gamma \in S_6 \mid \gamma = (i_1\, j_1)\,(i_2\, j_2)\,(i_3\, j_3) \text{ con } \{(i_k\, j_k)\}_{k=1}^{3} \text{ 2-cicli disgiunti}\}$$

(A) Mostrare che ogni trasposizione di S_6 può essere scritta come prodotto di 3 elementi di T_3; [*Suggerimento. Sfruttare un ragionamento analogo a quello dell'esercizio 7.4. (B)*]
(B) Utilizzare il punto (A) per dedurre che $\langle T_3 \rangle = S_6$.

Esercizio 8.8. Sia A un anello (unitario). Ricordiamo che $a \in A$ è detto *nilpotente* se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n = 0_A$. Dimostrare che se $a \in A$ è nilpotente allora $(1_A + a) \in A$ è invertibile.
[*Suggerimento. Come può essere espressa la somma di due potenze n-sime?*]

Definizione. Sia A un anello e sia $K \subset A$ un sottoanello di A. Il radicale di K in A, $\sqrt[A]{K}$, è definito come l'insieme degli elementi $a \in A$ per cui esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $a^m \in K$.

Esercizio 8.9. Siano A, B due anelli e sia $\varphi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Sia K un sottoanello di B. Mostrare che $\sqrt[A]{\varphi^{-1}(K)} = \varphi^{-1}\left(\sqrt[B]{K}\right)$.

Esercizio 8.10. Sia A un anello (unitario) commutativo. Sia J un ideale di A. Dimostrare che $\sqrt[A]{J}$ è ancora un ideale. Dimostrare che $\sqrt[A]{\sqrt[A]{J}} = \sqrt[A]{J}$.