

**A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.**  
**PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.**  
**ESERCITAZIONI. FOGLIO 6.**

**Esercizio 6.1.** Studiare la compatibilità e risolvere quando possibile il seguente sistema di equazioni congruenziali lineari al variare di  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{cases} 22(X+k) \equiv 2 \pmod{17} \\ 4X \equiv 3k \pmod{11} \\ kX \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

**Esercizio 6.2.** Consideriamo  $\mathbb{Z}_{15}$  e consideriamo l'insieme degli invertibili  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$ .

- (A) Determinare  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$ .  
(B) Per ciascun elemento di  $g \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$  calcolare  $g^{1347}$ .

**Esercizio 6.3.** Denotiamo con  $i$  l'unità immaginaria di  $\mathbb{C}$ . Consideriamo le seguenti matrici:

$$\pm \underline{1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \pm \underline{i} = \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad \pm \underline{j} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \pm \underline{k} = \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- (A) Verificare che l'insieme  $Q = \{\pm \underline{1}, \pm \underline{i}, \pm \underline{j}, \pm \underline{k}\}$  ha una struttura di gruppo rispetto all'usuale prodotto tra matrici a coefficienti complessi. A tal scopo scrivere una tabella moltiplicativa che descriva l'operazione di prodotto su  $Q$ .  
(B) Determinare tutti i sottogruppi di  $Q$ . Stabilire se vi sono sottogruppi normali ed in caso esibirli. Determinare il centro del gruppo  $Q$ .  
(C) Denotiamo con  $\mathcal{Z}(Q)$  il centro del gruppo  $Q$ . Descrivere il gruppo quoziente  $Q/\mathcal{Z}(Q)$  scrivendone una tavola moltiplicativa.  
(D) Descrivere tutti gli omomorfismi da  $Q$  in  $\mathbb{Z}_4$ .

**Esercizio 6. 4.** Sia  $(G, \cdot)$  un gruppo abeliano di cardinalità  $n < +\infty$  e siano  $1_G = g_1, g_2, \dots, g_n$  gli elementi di  $G$ . Senza fare uso del Teorema di Lagrange, ma utilizzando la definizione di gruppo abeliano:

- (A) Mostrare che  $g_1^2 \cdots g_n^2 = 1_G$ .  
(B) Mostrare che  $g^n = 1_G$  per ogni  $g \in G$ . (*Suggerimento. Osservare che per ogni fissato  $h \in G$  l'applicazione  $L_h : G \rightarrow G$ ,  $L_h : g \mapsto h \cdot g$  è biiettiva*)  
(C) Utilizzando l'Esercizio 3.6 del Foglio 3, osservare che l'ordine di un elemento<sup>1</sup>  $g \in G$  divide  $|G| = n$ . Se non si è svolto l'Esercizio precedentemente citato dimostrare che l'ordine di un elemento  $g \in G$  divide ogni numero  $k$  tale che  $g^k = 1_G$ .

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che l'ordine di un elemento  $g \in G$  è il più piccolo intero positivo  $k$  tale che  $g^k = 1_G$ .

### ESERCIZI PER CASA

**Esercizio 6.5.** Consideriamo il seguente insieme di applicazioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

(A) Mostrare che tale insieme è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni (denoteremo con  $\circ$  l'operazione di composizione).

(B) Sia  $T_y \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$  la traslazione di  $y$ , ovvero l'applicazione definita da  $T_y : x \mapsto x + y$ . Mostrare che il sottoinsieme delle traslazioni  $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{T_y \mid y \in \mathbb{R}\}$  è un sottogruppo normale di  $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ .

(C) Mostrare che  $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{A}(\mathbb{R}), \circ)$ ,  $\varphi : y \mapsto T_y$  dove  $T_y(x) = x + y$  è un omomorfismo iniettivo.

(D) Determinare il sottoinsieme  $\mathcal{A}^+$  delle applicazioni in  $\mathcal{A}(\mathbb{R})$  che manda  $\mathbb{R}_+$  in sé biettivamente. Mostrare che si tratta di un sottogruppo di  $(\mathcal{A}(\mathbb{R}), \circ)$ .

(E) Mostrare che esiste una mappa  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ed un isomorfismo  $\varphi : \mathcal{A}^+ \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$  tale che, se  $g \in \mathcal{A}^+$  (e dunque  $\varphi(g) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ )  $(\varphi(g) \circ F)(x) = (F \circ g)(x)$ .

**Esercizio 6.6.** Consideriamo  $\mathbb{N}$ . Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{B}_1 = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f(0) = 0, f \text{ è biettiva e } |f(k) - k| \leq 1\}$$

(A) Sia  $k \geq 2$ . Mostrare che se  $f(k) = k - 1$  allora  $f(k - 1) = k$ .

(B) Siano  $n$  e  $k$  tali che  $f(n) = n$  e  $k \in \mathbb{N}$  è il primo intero positivo per cui  $f(n + k) = n + k$ . Allora  $k - 1 = 2m$  è pari e per ogni  $i = 1, \dots, m$  risulta che  $(f(n + 2i - 1), f(n + 2i)) = (n + 2i, n + 2i - 1)$ .

(C) Dedurre da (B) che ogni elemento di  $\mathcal{B}_1$  è tale che  $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ .

(D) Osservare che per ogni  $k \in \mathbb{N}^*$  la trasformazione  $T_k$  definita come  $T_k(m) = m$  se  $m \neq \{2k - 1, 2k\}$  e  $T_k(2k - 1) = 2k$ ,  $T_k(2k) = 2k - 1$  è nell'insieme  $\mathcal{B}_1$ . Verificare che le trasformazioni ottenute come composizione eventualmente numerabile delle applicazioni  $T_k$  è ancora in  $\mathcal{B}_1$ . Dedurre che la cardinalità di  $\mathcal{B}_1$  è  $|\mathbb{R}|$ .

**Esercizio 6.7.** Stabilire la compatibilità ed eventualmente risolvere il seguente sistema di equazioni congruenziali lineari:

$$\begin{cases} 24X \equiv 6 \pmod{46} \\ 9X \equiv 42 \pmod{21} \\ 13^{2347}X \equiv 2 \pmod{15} \end{cases}$$

**Esercizio 6.8.** Consideriamo l'anello degli interi modulo 26.

(A) Determinare  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{26})$ .

(B) Stabilire se si tratta di un gruppo ciclico.

(C) Esibire un sottogruppo ciclico di ordine 4.

**Esercizio 6.9.** Sia  $\mathbb{R}$  la retta reale. Sia  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $a \neq 1$ . Consideriamo la seguente relazione:

$$x \rho y \Leftrightarrow x = a^k \cdot y \text{ per un opportuno } k \in \mathbb{Z}$$

(A) Mostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.

(B) Esibire un modello dello spazio quoziente  $\mathbb{R}/\rho$ .

(C) Costruire, a partire da due funzioni  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f_i(x + k \log(a)) = f_i(x)$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ , una funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che sia costante sulle classi di equivalenza.

(D) Determinare una applicazione  $\bar{g} : \mathbb{R}/\rho \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g = \bar{g} \circ \pi$  dove  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\rho$  è la proiezione al quoziente.