A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
SOLUZIONE ESERCIZI FOGLIO 2.

Esercizio 2.1. Consideriamo $\mathbb{R}^2$. Diremo che $(x_1\,,\,x_2) \leq (y_1\,,\,y_2) \Leftrightarrow \min\{y_2 - x_2\,;\,y_1 - x_1\} \geq 0$.

(A) Verificare che si tratta di una relazione d'ordine. Mostrare che non è una relazione d'ordine totale.
(B) Sia $Z = \{(m, n) \,|\, m, n \in \mathbb{Z},\ |m| + |n| \leq 2\}$. Esibire tutte le catene massimali di $(Z, \leq |_Z)$.
(C) Sia $Q = \{(p, q) \,|\, p, q \in \mathbb{Q},\ |p| + |q| \leq 2\}$. Mostrare che $\leq |_Q$ è una relazione d'ordine ma non di ordine totale. E' un insieme induttivo? Perché?

Soluzione. Cominciamo dal punto (A). Dobbiamo verificare che la relazione definita nell'intestazione dell'esercizio è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Prima di cominciare le dimostrazioni di tali proprietà osserviamo che segue dalla definizione che $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ se e soltanto se $y_1 \geq x_1$ e $y_2 \geq x_2$.

Riflessività. Poiché $x_1 \geq x_1$ e $x_2 \geq x_2$ risulta che $(x_1, x_2) \leq (x_1, x_2)$.

Antisimmetria. Supponiamo che $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ e che $(y_1, y_2) \leq (x_1, x_2)$. Dalla prima segue che $y_1 \geq x_1$ e $y_2 \geq x_2$, dalla seconda segue che $x_1 \geq y_1$ e che $x_2 \geq y_2$. Per essere verificate entrambe le coppie di disuguaglianze deve risultare $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$ che è equivalente a dire che $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

Transitività. Supponiamo che $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ e che $(y_1, y_2) \leq (z_1, z_2)$. Dalla prima segue che $y_1 \geq x_1$ e $y_2 \geq x_2$. Dalla seconda segue che $z_1 \geq y_1$ e $z_2 \geq y_2$. Mettendo insieme le due coppie di disuguaglianza otteniamo $z_1 \geq y_1 \geq x_1$ e $z_2 \geq y_2 \geq x_2$. Ne segue che $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$.

Abbiamo mostrato che la precedente relazione è una relazione d'ordine su $\mathbb{R}^2$. Vogliamo far vedere che NON è una relazione d'ordine totale. A questo scopo ci è sufficiente esibire due coppie di numeri reali (x_1, x_2) e (y_1, y_2) tali che non valga $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ né $(y_1, y_2) \leq (x_1, x_2)$. Affinché nessuna delle due disuguaglianze sia verificata deve risultare che $x_1 > y_1$ e $y_2 > x_1$ oppure viceversa. Possiamo quindi scegliere $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Per dimostrare (B) si devono dimostrare le seguenti affermazioni:
(1) Ogni catena massimale in Z comincia per uno tra $(-2, 0)$, $(-1, -1)$ e $(0, -2)$.
(2) Ogni catena massimale termina per uno tra $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 2)$.
(3) Dimostrare che se una catena massimale contiene $(p, q) \in Z$ allora l'elemento successivo della catena (nel caso in cui (p, q) non sia un elemento massimale, quindi uno dei 3 elementi del punto (2)) sarà necessariamente uno dei due seguenti: $(p + 1, q)$, $(p, q + 1)$.

Dimostrazione di (1). Consideriamo un elemento $(p, q) \in Z$ che non sia uno dei tre elencati nel punto (1). Facciamo vedere che vale una delle seguenti $(-2, 0) \leq (p, q)$, $(-1, -1) \leq (p, q)$, $(0, -2) \leq (p, q)$. Osserviamo che

$$(p, q) \in Z \setminus \{(-2, 0), (-1, -1), (0, -2)\} = \{(-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 2), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0), (0, -1), (1, -1)\}$$

I primi otto elementi di questi insieme sono tutti maggioranti di $(-2, 0)$, gli ultimi due sono maggioranti di $(0, -2)$. Osserviamo inoltre che le coppie di elementi dell'insieme $\{(-2, 0), (-1, -1), (0, -2)\}$ non sono in relazione tra di loro. Ragioniamo quindi per assurdo: sia C una catena massimale che ha come minimo un elemento (p, q) diverso da uno di quelli elencati, uno (o più d'uno) dei tre insiemi $C \cup \{(-2, 0)\}$, $C \cup \{(-1, -1)\}$, $C \cup \{(0, -2)\}$ fornirebbe una catena che contiene strettamente C, contraddicendo così la massimalità di C. Ne segue (1).

Dimostrazione di (2). Si procede in totale analogia alla dimostrazione di (1). Consideriamo un elemento $(p,q) \in Z$ che non sia uno dei tre elencati nel punto (2). Facciamo vedere che vale una delle seguenti $(p,q) \leq (2,0)$, $(p,q) \leq (1,1)$, $(p,q) \leq (0,2)$. Osserviamo che

$$(p,q) \in Z \backslash \{(2,0),(1,1),(0,-2)\} = \{(-1,0),(0,0),(-1,1),(1,0),(0,1),(-1,-1),(-2,0),(0,-1),(1,-1),(0,-2)\}$$

Osserviamo che tutti gli elementi dell'insieme in questione sono maggiorati da $(1,1)$. Osserviamo inoltre che le coppie di elementi dell'insieme $\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$ non sono in relazione tra di loro. Ragioniamo per assurdo. Sia C una catena massimale che ha come minimo un elemento (p,q) diverso da uno di quelli elencati allora $C \cup \{(1,1)\}$ è una catena che contiene strettamente C; questo contraddice la massimalità di C. Ne segue (2).

Dimostrazione di (3). Sia $C = \{(p_i,q_i) \,|\, i = 1...m\}$ una catena massimale e sia (p_k,q_k) in C. Sia (p_{k+1},q_{k+1}) l'elemento della catena C immediatamente successivo. Se $p_{k+1} - p_k + q_{k+1} - q_k \geq 2$ la catena C non potrebbe essere massimale: sia infatti $i_p = p_{k+1} - p_k$ e $i_q = q_{k+1} - q_k$, la catena C sarebbe contenuta propriamente nella catena

$$(p_1,q_1) \leq (p_2,q_2) \leq \cdots \leq (p_k,q_k) \leq \cdots \leq (p_k+i_p,q_k) \leq \cdots \leq (p_k+i_p,q_k+i_q) = (p_{k+1},q_{k+1}) \leq \cdots \leq (p_m,q_m)$$

infatti la somma di i_p e i_q è maggiore o uguale a due, il che implica che o entrambi sono maggiori oppure, nel caso in cui uno dei due sia nullo, l'altro è almeno uguale a due.

Abbiamo appena visto che se una catena C di $(Z,\leq)$ è massimale allora essa deve verificare le condizioni (1), (2) e (3). Viceversa non è difficile vedere che una catena verificante le condizioni precedenti è massimale. [Le condizioni (1) e (2) escludono che la catena possa essere allungata aggiungendo minoranti o maggioranti, mentre la (3) ci dice che non possono essere aggiunti elementi nel mezzo della catena]

Siamo arrivati quindi al punto (C). Chiaramente la restrizione di $\leq$ all'insieme Q è ancora una relazione d'ordine, e la coppia di elementi che abbiamo introdotto nel punto (A) allo scopo di mostrare che non si trattava di una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}^2$ è in realtà una coppia di elementi di Q. Ne segue che $\leq|_Q$ è una relazione d'ordine che non è una relazione d'ordine totale.

Si chiede poi se l'insieme sia o meno induttivo. La risposta corretta è che l'insieme non è induttivo. Per provare una tale affermazione è sufficiente esibire una catena che non ammette maggioranti. Consideriamo quindi due successioni monotone crescenti $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{r'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che $\{(r_k,r'_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Q$ e $(r_k,r'_k) \to (\sqrt{2}\,,\, 2-\sqrt{2})$. Poiché le due successioni sono monotone crescenti abbiamo che $(r_k,r'_k) \leq (r_{k+1},r'_{k+1})$, quindi la successione delle coppie (r_k,r'_k) è una catena. Ragioniamo per assurdo; supponiamo che esista un maggiorante $(R_1,R_2) \in Q$ di tale catena. Essendo un maggiorante deve risultare $R_1 \geq r_k$ e $R_2 \geq r'_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque, passando al limite, $R_1 \geq \sqrt{2}$ e $R_2 \geq 2-\sqrt{2}$. D'altra parte $2 = 2-\sqrt{2}+\sqrt{2} \leq |R_1| + |R_2| \leq 2$ da cui risulterebbe che $R_1 = \sqrt{2}$ e $R_2 = 2-\sqrt{2}$, in contraddizione con l'ipotesi $(R_1,R_2) \in Q \subset \mathbb{Q}^2$. $\square$

Esercizio 2. 2. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ due applicazioni la cui composizione $g \circ f : X \to X$ è un' applicazione biettiva.

(A) Mostrare che $|Y| \geq |X|$.
(B) Mostrare che $|Y| = |X|$ se e solo se $|Im(f)| = |Y|$.
(C) Fornire un esempio in cui $Im(f) \neq Y$ ma $|Y| = |Im(f)|$ e $|Y \setminus Im(f)| \geq \aleph_0$.

Soluzione. Cominciamo dal punto (A). Essendo la composizione $g \circ f : X \to X$ biettiva sappiamo che l'applicazione $f : X \to Y$ è iniettiva (vedere ad esempio l'esercizio 1.2 del primo foglio). Questo ci dice che $|X| \leq |Y|$.

Per mostrare (B). Essendo $f : X \to Y$ iniettiva essa è una biezione sull'immagine di f. Pertanto $|X| = |Im(f)|$. Questo ci dice che: $|Im(f)| = |Y| \;\Leftrightarrow\; |X| = |Y|$.

Per mostrare (C) possiamo considerare l'esempio seguente: prendiamo $X = Y = \mathbb{N}$ e consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = 2n$ che invia i numeri naturali nei numeri pari e l'applicazione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(2n+1) = 0, g(2n) = n$. La composizione $g \circ f$ è l'identità sui numeri naturali. In questa situazione $|Im(f)| = |\mathbb{N}|$, mentre la cardinalità di $\mathbb{N} \setminus Im(f) = \{\text{dispari}\}$ è anch'essa uguale a $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. □

Esercizio 2. 3. [1] Trovare una partizione di $\mathbb{N}$ in una famiglia numerabile di sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{N}$, ovvero, trovare una famiglia $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, F_2, ...\}$ con $F_i \neq \varnothing\ \forall i,\ F_i \cap F_j = \varnothing$ per $i \neq j$ ed ogni insieme F_i di cardinalità numerabile. (*Suggerimento. Sfruttare ripetutamente la partizione dei naturali in pari e dispari*).

Soluzione. Iniziamo ripartendo $\mathbb{N}$ in pari e dispari:

$$\mathbb{N} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Consideriamo ora l'insieme dei pari. Possiamo partizionarlo ulteriormente come segue:

$$\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{2(2k) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Proseguiamo con le suddivisioni al passo n-simo avremo

$$\{2^n k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{2^{n+1} k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2^n(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo quindi la seguente partizione di $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0\} \cup \bigcup_{j=0}^{n} \{2^j(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Mandando n ad infinito otteniamo quindi una partizione di $\mathbb{N}$ con le proprietà richieste:

$$\mathbb{N} = \{0\} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \{2^j(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}. \quad \square$$

Esercizio 2. 4. [2] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ il suo grafico. Dimostrare che $|(0,1)| = |\Gamma_f|$ esibendo una biezione tra i due insiemi. Sapendo che $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ mostrare che ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ contenente un intervallo aperto è tale che $|A| = |\mathbb{R}|$. Esibire due applicazioni iniettive $\mathbb{R} \hookrightarrow A$ e $A \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Soluzione. Come prima cosa vogliamo mostrare che $|\Gamma_f| = |(0,1)|$ Cominciamo osservando che la funzione $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $g(x) = \log\Big((x-1) + \frac{1}{(1-x)}\Big)$ fornisce una biezione tra l'intervallo aperto $(0,1)$ e la retta reale $\mathbb{R}$ (sapete dimostrarlo?). D'altra parte $|\Gamma_f| = |\mathbb{R}|$ come si può vedere facilmente mostrando che $f : \mathbb{R} \to \Gamma_f$ è una biezione (l'inversa di f è semplicemente la restrizione della proiezione $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \pi(x,y) = x$ all'insieme Γ_f).

Per dimostrare la seconda parte dell'esercizio vedremo che è sufficiente mostrare che tutti gli intervalli aperti e limitati sono in biezione con $(0,1)$ (e quindi tutti gli intervalli aperti sono in biezione tra di loro). Una biezione esplicita tra $(0,1)$ e l'intervallo aperto (a,b) è data dalla mappa $h_{a,b} : (0,1) \to (a,b)$, $h_{a,b}(x) = (b-a)\,x + a$. Possiamo quindi dimostrare la seconda affermazione dell'esercizio: consideriamo un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$, contenente un intervallo (a,b). La mappa $h_{a,b} \circ g^{-1}$ fornisce una biezione tra $\mathbb{R}$ ed (a,b), e dunque una mappa iniettiva da $\mathbb{R}$ in A. Ne segue che $|\mathbb{R}| \leq |A|$. D'altra parte A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e l'inclusione $A \hookrightarrow \mathbb{R}$ ci fornisce una applicazione iniettiva da A in $\mathbb{R}$, quindi

[1] Tratto dal terzo foglio di esercizi del corso di Algebra 1 dell' A.A. 2013-2014 a cura del Dott. Giovanni Cerulli Irelli.
[2] Parzialmente tratto dall'esercizio 2.8 del libro "Topologia" del Prof. M. Manetti.

$|A| \leq |\mathbb{R}|$. Ne deduciamo che $|A| = |\mathbb{R}|$. $\square$

Esercizio 2. 5. Sia $A = \{a_1, ..., a_n\}$ un insieme finito di cardinalità n. Definiamo $\binom{n}{k}$ come il numero di sottoinsiemi distinti di cardinalità k in $\mathcal{P}(A)$. Notare che $\binom{n}{0} = 1$, perché $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$. Mostrare che:

(A) Fissato un elemento $a \in A$ mostrare che la seguente è una partizione della famiglia dei sottoinsiemi di A di cardinalità k: $\mathcal{F}_a^k = \{B \subseteq A \mid |B| = k \text{ e } a \in B\}$ e $\mathcal{F}_{\not a}^k = \{B \subseteq A \mid |B| = k \text{ e } a \notin B\}$.
Dedurne che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
(B) Consideriamo l'insieme $\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \geq k\}$. Definiamo la seguente relazione:
$(m, l) \leq (n, k)$ se e soltanto se $\{\ n > m$ **oppure** $n = m$ e $k \geq l\}$
Osservare che è una relazione d'ordine totale sull'insieme $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. Osservare che $(\mathcal{T}_{\mathbb{N}}, \leq)$ è ben ordinato.
(C) Osservato che $\binom{n}{0} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\binom{n}{n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ utilizzare il principio di induzione forte sulle coppie $(n, k) \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ e l'uguaglianza del punto (A) per dimostrare la formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(D) Sia $\leq$ una relazione d'ordine rispetto alla quale A risulti totalmente ordinato. Mostrare che il numero di catene di lunghezza k (ovvero catene che coinvolgono k elementi di A) è $\binom{n}{k}$.

Soluzione. Per quanto riguarda (A) si tratta semplicemente di osservare che fissato un elemento $a_j \in A$, dato un sottoinsieme $B \subseteq A$ di cardinalità uguale a k, esso può contenere a_j oppure non contenerlo. Nel primo caso ($B \in \mathcal{F}_{a_j}^k$) B è ottenuto come unione di $\{a_j\}$ con un sottoinsieme di cardinalità $k-1$ dell'insieme $A \setminus \{a_j\}$; il numero dei sottoinsiemi di k elementi contenenti a_j è dunque uguale al numero dei sottoinsiemi formati da $k-1$ elementi nell'insieme $A \setminus \{a_j\}$, che è $\binom{n-1}{k-1}$. Nel secondo caso ($B \in \mathcal{F}_{\not a_j}^k$) B risulta essere contenuto in $A \setminus \{a_j\}$; il numero di elementi di $\mathcal{F}_{\not a_j}^k$ è quindi uguale al numero di sottoinsiemi di cardinalità k in $A \setminus \{a_j\}$, ovvero $\binom{n-1}{k}$. Ne risulta dunque la formula: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Per quanto riguarda (B). Riflessività, antisimmetria e transitività sono di facile verifica. Si tratta di una relazione d'ordine totale perché, presi due elementi distinti $(n_1, k_1), (n_2, k_2) \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ abbiamo necessariamente $n_1 \leq n_2$ o $n_2 \leq n_1$ (perché la disuguaglianza standard sui numeri naturali è una relazione d'ordine totale); nel caso in cui valgano entrambe risulta necessariamente $k_1 < k_2$ o $k_2 < k_1$. In particolare deve valere $(n_1, k_1) < (n_2, k_2)$ oppure $(n_2, k_2) < (n_1, k_1)$, il che è equivalente a dire che la relazione d'ordine così definita è una relazione d'ordine totale.

Dimostriamo ora la formula in (C). L'insieme $(\mathcal{T}_{\mathbb{N}}, \leq)$ è ben ordinato. presa un insieme $A \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ è sempre possibile trovare il minimo di A: siano $p_1, p_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rispettivamente le proiezioni sul primo e sul secondo fattore. Dato A consideriamo l'insieme $p_1(A) \subseteq \mathbb{N}$. Tale insieme ha un minimo sia $n_1 = \min(p_1(A))$. Consideriamo poi $k_1 = \min(p_2(p_1^{-1}(n_1)))$. Per definizione della relazione d'ordine e di n_1 e k_1 abbiamo che (n_1, k_1) è il minimo dell'insieme A.

Essendo $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ un insieme numerabile ben ordinato possiamo applicare il prinicipio di induzione forte sulle coppie $(n, k) \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. Osserviamo che $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!n!}$; l'ipotesi induttiva è quindi verificata e possiamo inoltre limitarci a considerare i casi in cui $n > k$. Prendiamo quindi $(n, k) \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ con $n > k$ e supponiamo che il risultato sia vero per tutte le coppie $(m, l) \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ tali che $(m, l) < (n, k)$. Per quanto mostrato in (A) sappiamo che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$; d'altra parte le coppie $(n-1, k-1)$ ed $(n-1, k)$ sono ancora in $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ e sono entrambi minoranti di (n, k). Per l'ipotesi induttiva:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = (n-1)! \cdot \frac{k + (n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Per dimostrare (D) si osservi che in un insieme totalmente ordinato vi è una corrispondenza biunivoca tra catene e sottoinsiemi (perché?).

Esercizio 2.6. Consideriamo la collezione $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ ottenuti come unioni al più numerabili di intersezioni finite di dischi aperti $D^2((r_1, r_2)\,,\, r)$ centrati nei punti razionali $(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ di raggio $r \in \mathbb{Q}^+$ (ovvero $D^2((r_1, r_2), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - r_1)^2 + (y - r_2)^2} < r\}$)

(A) Sfruttando l'assioma di scelta mostrare che esiste una mappa iniettiva dall'insieme $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ delle intersezioni finite di elementi in $\{D^2((r_1, r_2)\,,\, r) \mid (r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2,\, r \in \mathbb{Q}^+\}$ nell'insieme $\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)$, la collezione dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+$. Dedurne che $|\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{N}|$.
(B) Utilizzare il punto (A) per far vedere che $|\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. (*Suggerimento. Far vedere che esiste una applicazione iniettiva da $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ nell'insieme delle successioni di elementi in $\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)$ ed un' applicazione iniettiva dalla collezione delle unioni finite o numerabili di elementi di $\{D^2((p, q), \frac{1}{2}) \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ nell'insieme $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$*).

Soluzione. Per quanto riguarda il punto (A) si proceda nel modo seguente. Per defінzione dell'insieme $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ ogni elemento di tale insieme può essere realizzato come intersezione finita di dischi aperti. Sia quindi $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$; esso può essere scritto come $I = D^2\left(\left(r_1^{(1)}, r_2^{(1)}\right), R_1\right) \cap \cdots \cap D^2\left(\left(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}\right), R_m\right)$, per una opportuna collezione di dischi. Per evitare ambiguità collegate alla molteplicità delle scritture di I come intersezione di dischi aperti invochiamo l'assioma di scelta e ad ogni $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ ne associamo una. Chiameremo $\mathcal{C}(I) = \left\{D^2\left(\left(r_1^{(1)}, r_2^{(1)}\right), R_1\right), ..., D^2\left(\left(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}\right), R_m\right)\right\}$ la collezione scelta per rappresentare I. La mappa $F : \mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)$ è quindi ottenuta inviando prima I in $\mathcal{C}(I)$ e successivamente $\mathcal{C}(I)$ nel sottoinsieme finito di $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+$ costituito dalle coppie che hanno come prima e seconda entrata rispettivamente le coordinate dei centri e i raggi dei dischi in $\mathcal{C}(I)$:

$$I \to \left\{D^2\left(\left(r_1^{(1)}, r_2^{(1)}\right), R_1\right), ..., D^2\left(\left(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}\right), R_m\right)\right\} \to \left\{\left(\left(r_1^{(1)}, r_2^{(1)}\right), R_1\right), ..., \left(\left(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}\right), R_m\right)\right\}$$

Ne deduciamo che $|\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}| \leq |\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)|$. D'altra parte $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+$ è un insieme numerabile e dunque $|\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)| = |\mathcal{P}_0(\mathbb{N})|$. D'altra parte sappiamo che $|\mathcal{P}_0(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|$. Abbiamo quindi $|\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}| \leq |\mathbb{N}|$. Andiamo ora a definire una mappa iniettiva G da $\mathbb{Z}^2$ in $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$:

$$G : \mathbb{Z}^2 \to \mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \quad , \qquad G : (z_1, z_2) \to D^2\left((z_1, z_2)\,, \frac{1}{2}\right)$$

Questo prova che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}^2| \leq |\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}|$. Mettendo assieme le due disuguaglianze possiamo concludere.

Passiamo al punto (B). Nel punto (A) abbiamo costruito una mappa iniettiva $F : \mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)$. Attraverso la mappa F (ed utilizzando l'assioma di scelta come nel caso precedente) possiamo quindi definire una applicazione iniettiva dalla collezione delle unioni al più numerabili di elementi di $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ e l'insieme delle parti di $\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)$, nel modo ovvio: sia $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$, utilizzando l'assioma di scelta selezioniamo $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, una delle successioni di elementi di $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ la cui unione è D (dunque $D = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$). Definiamo quindi $\overline{F} : \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+))$ come la seguente composizione:

$$D \quad \to \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \quad \to \quad \overline{F}(D) = \{F(I_1), ..., F(I_k), ...\}$$

Si osservi che $\overline{F}$ calcolata sull'elemento $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ ha per immagine $\{F(I)\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+))$. L'esistenza di tale applicazione iniettiva, assieme al punto (A) ci dice che $|\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
Per mostrare la disuguaglianza opposta èsufficiente costruire un' estensione della mappa G definita nel punto (A), in modo analogo a quanto fatto per la F. Costruiremo cioè una mappa iniettiva $\overline{G} : \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \to \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$. Sia infatti $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ un elemento di $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$, essendo $\mathbb{Z}^2$ numerabile possiamo ordinare gli elementi di A, $A = \{(x_1, y_1), .., (x_n, y_n), ...\}$. La mappa $\overline{G}$ è così definita su A:

$$\overline{G} : \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \to \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \,, \qquad \overline{G} : A = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), ...\} \to \bigcup_{j \in \mathbb{N}} D^2\left((x_j, y_j), \frac{1}{2}\right)$$

Poiché tutti i dischi $D^2((x, y), \frac{1}{2})$ con $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ sono a due a due disgiunti è di facile verifica l'iniettività di $\overline{G}$. Ne segue che $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)| \leq |\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}|$ e dunque $|\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.