A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO 2.

Definizione. Sia $(A, \leq)$ un insieme dotato di una relazione d'ordine. Un sottoinsieme $A' \subseteq A$ totalmente ordinato rispetto a "$\leq$" è detto una **catena** di A. Diremo che una catena A' è **massimale** se essa non è contenuta propriamente in nessun'altra catena di A. Un insieme si dice **induttivo** se ogni catena non vuota ammette maggioranti.

Esercizio 2.1. Consideriamo $\mathbb{R}^2$. Diremo che $(x_1\,,\,x_2) \leq (y_1\,,\,y_2) \Leftrightarrow \min\{y_2 - x_2\,;\,y_1 - x_1\} \geq 0$.

(A) Verificare che si tratta di una relazione d'ordine. Mostrare che non è una relazione d'ordine totale.
(B) Sia $Z = \{(m,n) \,|\, m,n \in \mathbb{Z},\, |m| + |n| \leq 2\}$. Esibire tutte le catene massimali di $(Z, \leq|_Z)$.
(C) Sia $Q = \{(p,q) \,|\, p,q \in \mathbb{Q},\, |p| + |q| \leq 2\}$. Mostrare che $\leq|_Q$ è una relazione d'ordine ma non di ordine totale. E' un insieme induttivo? Perché?

Esercizio 2.2. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ due applicazioni la cui composizione $g \circ f : X \to X$ è un' applicazione biettiva.

(A) Mostrare che $|Y| \geq |X|$.
(B) Mostrare che $|Y| = |X|$ se e solo se $|Im(f)| = |Y|$.
(C) Fornire un esempio in cui $Im(f) \neq Y$ ma $|Y| = |Im(f)|$ e $|Y \setminus Im(f)| \geq \aleph_0$.

Esercizio 2.3. [1] Trovare una partizione di $\mathbb{N}$ in una famiglia numerabile di sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{N}$, ovvero, trovare una famiglia $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, F_2, ...\}$ con $F_i \neq \varnothing\ \forall i$, $F_i \cap F_j = \varnothing$ per $i \neq j$ ed ogni insieme F_i di cardinalità numerabile. (*Suggerimento. Sfruttare ripetutamente la partizione dei naturali in pari e dispari*).

Esercizio 2. 4. [2] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ il suo grafico. Dimostrare che $|(0,1)| = |\Gamma_f|$ esibendo una biezione tra i due insiemi. Sapendo che $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ mostrare che ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ contenente un intervallo aperto è tale che $|A| = |\mathbb{R}|$. Esibire due applicazioni iniettive $\mathbb{R} \hookrightarrow A$ e $A \hookrightarrow \mathbb{R}$.

[1] Tratto dal terzo foglio di esercizi del corso di Algebra 1 dell' A.A. 2013-2014 a cura del Dott. Giovanni Cerulli Irelli.
[2] Parzialmente tratto dall'esercizio 2.8 del libro "Topologia" del Prof. M. Manetti.

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 2.5. Sia $A = \{a_1, ..., a_n\}$ un insieme finito di cardinalità n. Definiamo $\binom{n}{k}$ come il numero di sottoinsiemi distinti di cardinalità k in $\mathcal{P}(A)$. Notare che $\binom{n}{0} = 1$, perché $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$. Mostrare che:

(A) Fissato un elemento $a \in A$ mostrare che la seguente è una partizione della famiglia dei sottoinsiemi di A di cardinalità k: $\mathcal{F}^k_a = \{B \subseteq A \mid |B| = k \text{ e } a \in B\}$ e $\mathcal{F}^k_{\not a} = \{B \subseteq A \mid |B| = k \text{ e } a \notin B\}$.
Dedurne che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
(B) Consideriamo l'insieme $\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \geq k\}$. Definiamo la seguente relazione:
$$(m, l) \leq (n, k) \text{ se e soltanto se } \{\ n > m \ \textbf{oppure} \ n = m \text{ e } k \geq l\}$$
Osservare che è una relazione d'ordine totale sull'insieme $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. Osservare che $(\mathcal{T}_{\mathbb{N}}, \leq)$ è ben ordinato.
(C) Osservato che $\binom{n}{0} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\binom{n}{1} = n$ per ogni $n \geq 1$ utilizzare il principio di induzione forte sulle coppie $(n, k) \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ e l'uguaglianza del punto (A) per dimostrare la formula
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
(D) Sia $\leq$ una relazione d'ordine rispetto alla quale A risulti totalmente ordinato. Mostrare che il numero di catene di lunghezza k (ovvero catene che coinvolgono k elementi di A) è $\binom{n}{k}$.

Esercizio 2.6. Consideriamo la collezione $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ ottenuti come unioni al più numerabili di intersezioni finite di dischi aperti $D^2((r_1, r_2)\,,\, r)$ centrati nei punti razionali $(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ di raggio $r \in \mathbb{Q}^+$ (ovvero $D^2((r_1, r_2), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - r_1)^2 + (y - r_2)^2} < r\}$)

(A) Sfruttando l'assioma di scelta mostrare che esiste una mappa iniettiva dall'insieme $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ delle intersezioni finite di elementi in $\{D^2((r_1, r_2)\,,\, r) \mid (r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2,\ r \in \mathbb{Q}^+\}$ nell'insieme $\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)$, la collezione dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+$. Dedurne che $|\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{N}|$.
(B) Utilizzare il punto (A) per far vedere che $|\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. (*Suggerimento. Far vedere che esiste una applicazione iniettiva da* $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$ *nell'insieme delle successioni di elementi in* $\mathcal{P}_0(\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+)$ *ed un' applicazione iniettiva dalla collezione delle unioni finite o numerabili di elementi di* $\{D^2((p, q), \frac{1}{2}) \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ *nell'insieme* $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$).