

## 1. DIARIO DELLE LEZIONI

**1 marzo:** Introduzione mediante esempi agli spazi vettoriali topologici: spazio delle funzioni continue su un aperto di  $\mathbb{R}^d$ , delle funzioni analitiche in un aperto di  $\mathbb{C}$ , delle funzioni infinitamente derivabili su un compatto. Definizione di spazio vettoriale topologico, sottoinsieme limitato, operatori di traslazione. Vari tipi di SVT: spazi localmente convessi, localmente limitati, metrizzabili, normabili,  $F$ -spazi, spazi di Fréchet. Enunciato del teorema sulla metrizzabilità e normabilità di uno SVT. Proprietà di separazione dei compatti dai chiusi mediante aperti. Ogni SVT è di Hausdorff. Abbondanza di intorno bilanciati (convessi e bilanciati) in uno SVT (SVTLC). Costruzione di una base locale numerabile in uno SVT localmente limitato. Limitatezza dei compatti. Bibliografia: Rudin, capitolo 1

**3 marzo** Costruzione di seminorma in uno SVLC: funzionale di Minkowski associato ad un intorno di 0 e sue proprietà. Sottobase e base di seminorma in uno SV e struttura localmente convessa associata. Equivalenza tra la struttura di SVLC e di spazio seminormato. Caratterizzazione della continuità di un operatore lineare tra SVT. Caso dei funzionali lineari. Bibliografia: Rudin.

**8 marzo** Caratterizzazione della continuità di una seminorma. Funzionali continui in uno SVLC. Caratterizzazione della metrizzabilità di uno SVLC. Esempi: discussione delle strutture di SVLC, di Fréchet, della proprietà di Heine-Borel o locale limitatezza in  $C(\Omega)$ ,  $H(\Omega)$ ,  $C^\infty(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{D}[a, b]$ ,  $\mathcal{D}_K$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto e  $K \subset \Omega$  compatto. Cenni alla topologia limite induttivo di  $\mathcal{D}$ . Richiami sul teorema di Ascoli-Arzelà per spazi metrici compatti. Teorema di Hahn-Banach in SVLC. Duale di uno SVLC. Bibliografia: Rudin, Doplicher.

**10 marzo** Forma geometrica del teorema di Hahn-Banach. Spazi vettoriali in dualità e topologie deboli associate. Calcolo del duale. Topologia debole di uno SVLC e  $*$ -debole del duale. Polare di un insieme e sue proprietà. Teorema del bipolare. Teorema di Alaoglu. Algebre di Banach  $C_0(\Omega)$  e  $C(K)$ , con  $K$  spazio topologico compatto (di Hausdorff) e  $\Omega$  localmente compatto. Spazio di Banach delle misure complesse regolari sui boreliani (cenni). Teorema di rappresentazione di Riesz (sd). Struttura di SVLC in  $C(\Omega)$  e calcolo del suo duale. Bibliografia: Doplicher, Conway.

**15 marzo** Se  $X$  è normato e  $X$  è di Banach,  $\mathcal{B}(X, Y)$  è di Banach. Biduale di uno spazio di normato. Immersione canonica isometrica. Chiusura dell'immagine in caso di spazi di Banach. Spazi riflessivi. Calcolo del duale di  $c_0$  e di  $\ell^1$ . Densità  $*$ -debole del di uno spazio di Banach nel biduale, e del disco chiuso in norma in quello del biduale. Teorema di caratterizzazione della compattezza debole del disco unitario di uno spazio di Banach mediante la riflessività. Completezza debole sequenziale degli spazi riflessivi. Non riflessività di  $C([0, 1])$ . Equivalenza tra la metrizzabilità  $*$ -debole del disco unitario del duale di uno spazio di Banach  $X$  e la separabilità di  $X$ . Bibliografia: Conway.

**17 marzo** Punti e estremali di un convesso in uno spazio vettoriale. Faccia di un convesso. Esempi. Teorema di Krein-Milman. Costruzione di facce proprie mediante iperpiani tangenti al convesso. Se uno spazio di Banach ha disco unitario privo di punti estremali, lo spazio non può essere il duale di uno spazio di Banach. Esempio su  $L^1([0, 1])$ . Applicazione: stati (misure di probabilità) su uno spazio topologico compatto di Hausdorff e compattezza  $*$ -debole. Caratterizzazione degli stati estremali. Bibliografia: Conway, Doplicher, Pedersen.

**22 marzo** Chiusura  $*$ -debole e teorema di Krein-Smulian (sd); compattezza debole e teorema di Eberlein-Smulian sulla compattezza debole sequenziale (sd). Spazi normati di dimensione finita, equivalenza delle norme completezza; chiusura di un sottospazio di dimensione finita in uno spazio normato; continuità automatica di un operatore definito su uno spazio normato di dimensione finita. Costruzione dello spazio di Banach quoziente e proprietà di base; Esercizio

sulla caratterizzazione di uno spazio di Banach tramite serie assolutamente convergenti; esercizio sulla costruzione di somme dirette arbitrarie di spazi di Banach. Richiami sulla categoria di Baire (sd), teorema dell'applicazione aperta (sd), corollario sugli operatori continui invertibili e sulla equivalenza di norme (o topologie) confrontabili. Principio di uniforme limitatezza (sd). Topologia forte degli operatori in  $\mathcal{B}(X, Y)$  e struttura di spazio vettoriale topologico localmente convesso, corollario sulla completezza forte sequenziale, e la completezza forte dei net di operatori puntualmente limitati e convergenti. Operatori definiti su sottospazi propri di spazi di Banach, dominio, condominio, grafico nucleo di un operatore. Proprietà di grafico chiuso di un operatore limitato con dominio chiuso. Operatore chiuso. Esempi: operatori di moltiplicazione e derivazione. Teorema del grafico chiuso per operatori chiusi (da finire). Bibliografia: Conway, Pedersen, Doplicher-Longo.

**31 marzo** Teorema del grafico chiuso per operatori chiusi. Caratterizzazione degli operatori chiusi iniettivi con inverso continuo mediante il condominio chiuso. Esempi. Spazio di Hilbert, forma sesquilineare, identità di polarizzazione, forme simmetriche o positive. Prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Esempi. Somme dirette di spazi di Hilbert. Richiami sul teorema della proiezione (sd). Proiezione ortogonale. Richiami sul teorema di Riesz. Insiemi ortonormali. Basi ortonormali. Bibliografia: Doplicher, Doplicher-Longo, Pedersen.

**5 aprile** Teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali in spazi di Hilbert. Invarianza della cardinalità di una base ortonormale. Dimensione Hilbertiana. Operatori unitari ed isometrie. Due spazi di Hilbert sono unitariamente isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione hilbertiana. Esempio in  $L^2([0, 2\pi])$ . Operatori di moltiplicazione e integrali, esercizi sulla verifica di limitatezza. Corrispondenza biunivoca tra forme sesquilineari e limitate e operatori limitati. Aggiunto di un operatore tra spazi di Hilbert. Estensione al caso di spazi di Banach. Topologia forte e debole degli operatori. Esempi di successioni convergenti che distinguono le tre topologie. Esercizio sulla completezza nella topologia debole degli operatori. Proprietà dell'aggiunto. Proprietà  $C^*$  della norma. Operatori autoaggiunti. Relazione tra nucleo di un operatore e condominio dell'aggiunto. Invertibilità di un operatore e relazione con l'invertibilità dell'aggiunto. Proiezioni ortogonali e loro caratterizzazione. Bibliografia: Conway, Pedersen, Reed-Simon.

**7 aprile** Caratterizzazione delle isometrie, degli unitari, delle proiezioni ortogonali su spazio di Hilbert. Calcolo della norma di un operatore autoaggiunto. Operatori positivi. Proprietà di base. Teorema della radice quadrata di un operatore positivo. Modulo di un operatore. Isometrie parziali e loro caratterizzazione. Decomposizione polare di un operatore e sua unicità. Invertibilità di operatori positivi (da finire). Esercizio con un operatore diagonale su  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Bibliografia: Conway, Pedersen, Reed-Simon.

**12 aprile** Invertibilità di operatori positivi. Spettro di un operatore. Esempio con l'operatore di moltiplicazione su  $L^2([0, 1])$ . Spettro di un elemento di un'algebra di Banach. Caso di un operatore limitato su spazio di Banach. Spettro puntuale, continuo e residuo. Esercizi con operatori di shift e loro trasposti. Insieme risolvente. Limitatezza dello spettro. Raggio spettrale. L'insieme degli elementi invertibili di un'algebra di Banach con identità e' aperto in norma. Chiusura dello spettro. Funzione risolvente. Limite nullo all'infinito. Prima identità del risolvente. Sviluppabilità in norma della funzione risolvente nell'intorno di ogni punto. Funzioni analitiche a valori in uno spazio di Banach e funzioni debolmente analitiche. Equivalenza tra le due definizioni. Analiticità di una funzione di variabile complessa a valori in uno spazio di Banach sviluppabile in serie di potenze. Non trivialità dello spettro e calcolo del raggio spettrale (da finire). Bibliografia: Pedersen, Reed-Simon, Doplicher-Longo.

**14 aprile** Analiticità della funzione risolvente. Non trivialità dello spettro di un elemento di un'algebra di Banach. Esercizio sulle funzioni analitiche nella topologia debole degli operatori. Calcolo del raggio spettrale per serie di potenze o di Laurent con coefficienti in spazio di Banach.

Formula del raggio spettrale. Operatori compatti su spazio di Banach. Operatori di rango finito. Inversi di operatori compatti iniettivi in dimensione infinita non sono mai limitati. Gli operatori compatti formano un ideale bilatero chiuso in norma. Operatori nucleari. Operatori integrali. Operatori di Hilbert-Schmidt integrali. Teorema di Schauder sulla compattezza dell'aggiunto di un operatore in spazio di Banach. Bibliografia: Reed-Simon, Conway, Doplicher-Longo.

**19 aprile** Teorema di Riesz-Schauder sugli operatori compatti su spazio di Banach. Numerabilità dello spettro. Brevi cenni ai sistemi di Sturm-Liouville. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti su spazio di Hilbert. Calcolo del raggio spettrale per operatori autoaggiunti o più in generale normali. Spettro dell'aggiunto. Esercizio sull'approssimabilità di un operatore compatto su spazio di Hilbert mediante operatori di rango finito. Operatori limitati autoaggiunti hanno spettro reale e sono privi di spettro residuo. Esercizio di calcolo dello spettro per operatori diagonali limitati. Relazione tra lo spettro di un operatore, il suo inverso e il suo aggiunto. Bibliografia: Doplicher-Longo, Conway, Reed-Simon, Pedersen.

**21 aprile** Spettro di operatori positivi. Spettro dell'inverso e di un unitario. Teorema di Stone-Weierstrass. Calcolo funzionale continuo di un operatore autoaggiunto e limitato su spazio di Hilbert. Definizione di  $C^*$ -algebra (concreta). Spettro di un polinomio dell'operatore. Calcolo della norma di un polinomio dell'operatore. Teorema di esistenza e unicità del calcolo funzionale continuo e sue proprietà. Parte positiva e negativa di un operatore autoaggiunto. Teorema dello spectral mapping. Bibliografia: Doplicher-Longo; Reed-Simon.

**26 aprile** Ancora sul teorema dello spectral mapping, esercizio 8 capitolo 7 del Reed-Simon. Teorema dell'invarianza dello spettro di un operatore normale nella  $C^*$ -algebra che lo contiene (dim posticipata). Misure spettrali. Operatori senza molteplicità. Teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati senza molteplicità. Cenni all'estensione al caso con molteplicità. Calcolo funzionale boreliano. Teorema di esistenza e unicità. Funzioni di Baire e di Borel. Topologia forte e debole degli operatori e questioni di continuità delle operazioni di  $*$ -algebra. Bibliografia: Reed-Simon, Doplicher-Longo.

**28 aprile** Enunciato del teorema di Dixmier sulla misura basica. Definizione di  $C^*$ -algebra concreta e algebra di von Neumann. Teorema spettrale per operatori compatti e autoaggiunti. Operatori di rango finito. Approssimabilità degli operatori compatti su spazio di Hilbert mediante operatori di rango finito. Traccia di un operatore positivo e limitato. Operatori di classe traccia e proprietà principali. Decomposizione lineare di un operatore limitato mediante unitari. Compattezza degli operatori di classe traccia. Densità degli operatori di rango finito nella classe traccia. Estensione del funzionale traccia a  $\mathcal{T}_1$ . Bibliografia: per la prima parte: Dixmier, von Neumann algebras. Per la seconda: Pedersen, Analysis now e Reed Simon, Functional Analysis.

**3 maggio** Operatori di Hilbert-Schmidt. Proprietà di spazio di Hilbert. Stima della traccia della composizione di un operatore limitato con uno di classe traccia. Proprietà di traccia. Teorema di dualità tra  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{B}(H)$  e tra  $\mathcal{K}(H)$  e  $\mathcal{T}_1$ . Gli operatori di classe traccia formano uno spazio di Banach. Base ortonormale per  $\mathcal{T}_2$ . Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert. Spazio di Hilbert coniugato. Caratterizzazione degli operatori integrali di Hilbert-Schmidt come la classe degli operatori astratti di Hilbert-Schmidt su uno spazio di misura. Cenni storici alle applicazioni alle equazioni integrali di Fredholm. Bibliografia: Reed-Simon e Pedersen.

**5 maggio** Breve discussione di motivazione allo studio delle algebre di Banach commutative. Algebra di Banach involutiva. Definizione di  $C^*$ -algebra astratta. Esempi di algebre di Banach. Gruppi localmente compatti, cenni alla misura di Haar. Algebra di Banach  $L^1(G)$ . Prodotto di convoluzione. Casi in cui  $L^1(G)$  è commutative ed ha identità. Ideali chiusi e quozienti di algebre di Banach. Ideali massimali Studio degli ideali chiusi in  $C(X)$  con  $X$  compatto di

Hausdorff. Identificazione dell'algebra di Banach quoziente e degli ideali massimali. Teorema di Mazur. Caratterizzazione degli elementi non invertibili in un'algebra di Banach commutativa. Caratteri. Descrizione degli ideali massimali mediante i caratteri. Continuità automatica dei caratteri. Spettro di un'algebra di Banach commutativa. Trasformata di Gelfand. Teorema di Gelfand. Radicale di un'algebra di Banach commutativa con identità. Bibliografia: Doplicher-Longo; Pedersen.

**17 maggio** Ancora sul teorema di Gelfand. Calcolo dello spettro e relazione con la trasformata di Fourier e calcolo dell'immagine per le algebre di gruppo  $L^1(G)$  nel caso in cui  $G = \mathbb{Z}$  oppure  $G$  localmente compatto commutativo. Teorema di Wiener. Calcolo dello spettro e trasformata di Gelfand per  $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ . Aggiungere l'identità ad un'algebra di Banach. Costruzione parallela concreta per  $L^1(\mathbb{R})$ . Teorema di Stone-Weierstrass per uno spazio topologico localmente compatto. Aggiungere l'identità ad una  $C^*$ -algebra. Hermitianità e simmetria di un'algebra di Banach involutiva e loro equivalenza (sd). Cenni alle algebre di un gruppo libero su due generatori come controesempi. Proprietà automatica per le  $C^*$ -algebre. Bibliografia: Pedersen; Doplicher-Longo.

**19 maggio** Dipendenza dello spettro di un elemento dall'algebra di Banach che lo contiene. Lo spettro rispetto alla più piccola sottoalgebra di Banach contenente  $A$  coincide con la componente connessa dell'infinito dello spettro rispetto a l'algebra ambiente. In particolare, coincidono se quest'ultimo è connesso. Invarianza dello spettro nel caso delle  $C^*$ -algebre. Teorema di Gelfand-Naimark per  $C^*$ -algebre commutative con identità. Calcolo funzionale continuo come inversa della trasformata di Gelfand. Proprietà di funtorialità (equivalenza di categorie) tra  $C^*$ -algebre commutative con identità e spazi compatti di Hausdorff. Automatica continuità di uno \*-omomorfismo tra  $C^*$ -algebre, e automatica isometricità nel caso iniettivo. Bibliografia: Dispense di Doplicher-Longo, Pedersen.

**24 maggio** Estensione del teorema di Gelfand-Naimark a  $C^*$ -algebre non unitali. Applicazione: compattificazione di Stone-Check. Esempi di operatori privi di autovalori. Ogni compatto di  $\mathbb{C}$  privo di punti isolati è spettro di un operatore privo di autovalori. Viceversa, i punti isolati di uno spettro sono autovalori per operatori normali. Calcolo funzionale boreliano per operatori normali. Bibliografia: Pedersen.

**26 maggio** Definizione di famiglia spettrale a valori proiettori su spazio di Hilbert. Misure complesse associate. Costruzione del calcolo funzionale boreliano associato. Esempio di famiglia spettrale associata ad un operatore normale. Identificazione dei due calcoli funzionali boreliani. Integrale di Riemann-Stieltjes rispetto ad una famiglia spettrale (cenni). Operatori illimitati. Richiami su teorema del grafico chiuso. Definizione dell'operatore somma, della composizione e di una estensione. Aggiunto di un operatore illimitato su spazio di Hilbert. Relazione tra nucleo e immagine per operatori illimitati. Operatori simmetrici ed automaggiunti. Limitatezza di  $(A - \lambda)^{-1}$  se  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ , con  $A$  simmetrico. Operatori simmetrici massimali. Esempi con operatori di moltiplicazione. Operatori chiudibili e chiusura. Decomposizione di  $H \oplus H$  mediante il grafico di un operatore ed il suo aggiunto. Chiusura dell'aggiunto. Teorema di von Neumann sulla chiudibilità di un operatore. Relazione tra l'aggiunto e l'inverso. Bibliografia: Pedersen.

**31 maggio** Definizione di core per un operatore chiuso. Teorema: Se  $T$  è chiuso e densamente definito,  $T^*T$  è autoaggiunto e il suo dominio è un core per  $T$ . Inoltre  $T^*T + I$  è binivoco con inverso limitato. Definizioni equivalenti di normalità per un operatore illimitato (sd). Trasformata di Cayley e proprietà (sd). Isomorfismo d'ordine tra operatori simmetrici densamente definiti e isometrie  $U$  con immagine di  $I - U$  denso (sd). Operatori essenzialmente autoaggiunti. Caratterizzazione della chiusura, autoaggiuntezza ed essenziale autoaggiuntezza (sd). Indici di difetto. Caratterizzazione dell'esistenza di estensioni autoaggiunte (sd). Esempio

con l'operatore di derivazione densamente definito in  $L^2([0, 1])$ . Classificazione delle estensioni autoaggiunte (sd). Bibliografia: Pedersen. Per l'ultimo esempio vedere Reed-Simon.