S. DOPLICHER

Appunti del Corso di

ANALISI FUNZIONALE

Parte II

a cura di R. Longo

Anno Accademico 1974-75

INDICE DELLA PARTE II[a]

CAPITOLO V - Operatori lineari negli spazi di Banach.

5.1 Operatori limitati: teorema dell'uniforme limitatezza ed applicazioni; funzioni analitiche a valori operatori; teorema del grafico chiuso; sottospazi complementari di uno spazio di Banach. pag. 5.1

Principio dell'uniforme limitatezza. pag. 5.5

Teorema del grafico chiuso. pag. 5.28

Somma diretta di spazi di Banach. pag. 5.35

5.2 Operatori chiusi: chiudibilità e trasposto; teorema del codominio chiuso di Banach; spettro ed indice di un o= peratore e del trasposto. pag. 5.47

5.3 Operatori compatti: Operatori nucleari, integrali, di Hilbert-Schmidt; teoria di Riesz-Schauder e teorema del= l'alternativa di Fredholm. pag. 5.75

Operatori nucleari pag. 5.81

Operatori integrali su $\mathcal{C}([0,1])$ pag. 5.82

Operatori integrali di Hilbert-Schmidt pag. 5.83

Operatori di Volterra pag. 5.97

CAPITOLO VI - Stabilità e indice. Operatori Hermitiani e autoaggiunti; Perturbazioni.

6.1 Operatori di (semi-)Fredholm e proprietà dell'indice: stabilità per perturbazioni relativamente limitate ed invarianza per perturbazioni relativamente compatte. Spettro essenziale di un operatore chiuso. pag. 6.1

Chiudibilità " 6.2

Invertibilità " 6.7

Stabilità dell'indice di operatori di Fredholm " 6.11

6.2 L'omomorfismo "indice"; teorema dell'indice per gli operatori di Toeplitz " 6.34

Operatori di Wiener-Hopf " 6.44

Note complementari " 6.54

6.3 Teoria degli operatori hermitiani su spazi di Hilbert: trasformazione di Cayley, criteri di esistenza e classificazione delle estensioni autoaggiunte; stabilità degli indici di difetto. " 6.54.4

Perturbazioni di operatori hermitiani ed autoaggiunti " 6.79

Note complementari " 6.84

CAPITOLO VII - Algebre di Banach e calcolo funzionale analitico.

Perturbazioni dello spettro degli operatori li=

neari chiusi.

7.1 Trasformazione di Gelfand pag. 7.1

7.2 Funzioni analitiche di un elemento in un'algebra di Banach e teorema dello "Spectral Mapping" " 7.15

Note complementari " 7.22

7.3 Perturbazioni dello spettro. Operatori lineari chiusi su uno spazio di Banach: integrale di Dunford; pertur= bazioni e stabilità degli insiemi spettrali compatti. " 7.24

CAPITOLO VIII - C^*-algebre e teoria spettrale.

8.1 Prime proprietà; C^*-algebre commutative, teorema di Gelfand-Naimark. " 8.2

8.2 Calcolo funzionale boreliano; teoria spettrale per operatori normali limitati " 8.18

8.3 Teoria spettrale per operatori autoaggiunti non li= mitati. Cenni di teoria della molteplicità spettrale " 8.35

V. OPERATORI LINEARI DEGLI SPAZI DI BANACH

V.I. Operatori limitati: Teorema dell'uniforme limitatezza ed applicazioni; Teorema del grafico chiuso.

Siano X e Y due spazi vettoriali normati.

Se A è un operatore lineare di X in Y definiamo

$$
\begin{aligned}
(5.1) \qquad \|A\| &= \sup_{x\in S_1^X} \|Ax\| \\
&= \inf\{\lambda\in\mathbb{R} \,/\, \forall x\in X,\ \|Ax\|\leq\lambda\|x\|\} \\
&= \sup_{x\in B_1^X} \|Ax\| \\
&= \inf\{\lambda\in\mathbb{R} \,/\, AB_1^X\subset B_\lambda^Y\}
\end{aligned}
$$

ove S_1^X è l'insieme dei vettori di X di norma 1 e B_λ^X è l'insieme dei vettori di X di norma minore di λ.

Naturalmente $\|A\|$ può essere un numero positivo oppure il sumbolo $+\infty$.

Diremo che A è un operatore lineare <u>limitato</u> se $\|A\| < +\infty$.

5.1. <u>Proposizione</u> SIA A UN OPERATORE LINEARE DI UNO SPAZIO NORMATO X IN UNO SPAZIO NORMATO Y.

LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI

1. A E' UN OPERATORE CONTINUO;
2. A E' CONTINUO NEL PUNTO O;
3. A E' UN OPERATORE LIMITATO.

<u>Dim.</u> Le implicazioni $3 \Rightarrow 1$ e $1 \Rightarrow 2$ sono ovvie.

Dimostriamo $2 \Rightarrow 3$.

Se A è continuo nell'origine allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in B_{\delta}^{X} \quad \Rightarrow \quad AX \in B_{1}^{Y}$$

ossia

$$AB_{\delta}^{X} \subset B_{1}^{Y} \quad \text{da cui} \quad AB_{1}^{X} \subset B_{\delta^{-1}}^{Y}$$

cioè A è limitato e $\| A \| \leq \delta^{-1}$.

□

Se X e Y sono due spazi normati indicheremo con $\mathcal{B}(X,Y)$ l'insieme degli operatori lineari e limitati di X in Y. $\mathcal{B}(X,Y)$ possiede una struttura di spazio vettoriale definendo in modo ovvio la combinazione lineare di due operatori lineari A e B

$$(\alpha A + \beta B)x = A(\alpha x) + B(\beta x) \qquad x \in X \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

e può essere considerato come un sottospazio dello spazio $\mathcal{L}(X,Y)$ di tutti gli operatori lineari di X in Y. Inoltre $\mathcal{B}(X,Y)$ è uno spazio normato dalla norma definita in (5.1); infatti le relazioni

$$\|A\| \geq 0 \quad , \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$$
$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$
$$\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$$

Si ricavano senza difficoltà dalla (5.1). Di più vale la seguente

5.2. <u>Proposizione</u> SE X E' UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO E Y E' UNO SPAZIO DI BANACH ALLORA $\mathcal{B}(X,Y)$ E' UNO SPAZIO DI BANACH.

<u>Dim.</u> Dobbiamo dimostrare solo che $\mathcal{B}(X,Y)$ è uno spazio metrico completo.

Se A_n è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(X,Y)$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\| A_m - A_n \| < \varepsilon \qquad \forall\, n,m > n_\varepsilon$$

per cui per qualunque vettore x in X

$$(5.2) \qquad \| A_m x - A_n x \| \leq \|A_m - A_n\| \, \|x\| < \varepsilon \|x\|, \; n > n_\varepsilon \,, \; m > n_\varepsilon$$

ossia $A_n x$ è una successione di Cauchy in Y e quindi converge, data la completezza di Y, a un vettore in Y che chiameremo Ax.

L'applicazione $x \to Ax$ definisce un elemento di $\mathcal{L}(X,Y)$ ossia un operatore lineare da X in Y; vogliamo dimostrare che $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $\lim_n A_n = A$.

Dalla (5.2) otteniamo

$$\| Ax - A_n x \| = \lim_m \| A_m x - A_n x \| \leq \varepsilon \| x \|, \quad x \in X \quad n > n_\varepsilon$$

da cui

$$\| A - A_n \| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n > n_\varepsilon$$

dunque

$$\| A \| \leq \| A - A_n \| \; \varepsilon + \| A_n \| < \infty$$

e

$$A = \lim_n A_n$$

$\square$

Come conseguenza immediata della precedente proposizione vediamo che il duale X di uno spazio normato X è sempre completo giacchè, come sappiamo, $X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$.

Nel caso in cui X=Y porremo $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,Y)$.

$\mathcal{B}(X)$ possiede non soltanto una struttura di spazio vettoriale normato, ma anche quella di algebra normata, ossia il prodotto di due elementi di $\mathcal{B}(X)$, A e B,

$$ABx = A(Bx) \qquad \forall\, x \in X$$

definisce un elemento di $\mathcal{B}(X)$, valgono le solite proprietà distributive, e

$$(5.3) \qquad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| .$$

Se X è completo diremo che $\mathcal{B}(X)$ è un'algebra di Banach.

Notiamo che la condizione (5.3) implica che il prodotto è una funzione continua da $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$ in $\mathcal{B}(X)$.

PRINCIPIO DELL'UNIFORME LIMITATEZZA

Vogliamo dimostrare un teorema che è una conseguenza molto importante del teorema della categoria di Baire.

5.3 Teorema di BANACH-STEINHAUS

SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, Y UNO SPAZIO NORMATO E $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ UNA FAMIGLIA DI OPERATORI LINEARI LIMITATA IN OGNI PUNTO CIOE'

$$\sup \{ \|Ax\| ,\ A \in \mathcal{F} \} < \infty$$

PER OGNI FISSATO $x \in X$.

In tali ipotesi $\mathfrak{F}$ è uniformemente limitata cioè

$$\sup \{ \|A\| \ , \quad A \in \mathfrak{F} \} < \infty$$

Dim. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \{ x \in X / \|Ax\| \leq n \ , \ \forall A \in \mathfrak{F} \}$$

Ogni insieme E_n è chiuso data la continuità degli operatori appartenenti a $\mathfrak{F}$; inoltre per ipotesi

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n .$$

Per il teorema di Baire 3,3 esiste un intero n_0 per cui E_{n_0} ha parte interna non vuota, cioè esiste un vettore x_0 in X ed $R > 0$ tali che la palla $B^X_{x_0,R}$ di centro x_0 e raggio R sia contenuta in E_{n_0}, quindi

$$AB^X_{x_0,R} \subset B^Y_{n_0}$$

Se x è un arbitrario vettore non nullo di Y

$$x_0 + \frac{x}{2R\|x\|} \in B^X_{x_0,R}$$

per cui

$$\left\| A\left(x_0 + \frac{x}{2R\|x\|}\right) \right\| \leq n_0 \qquad \forall\ A \in \mathcal{F}$$

quindi, per ogni A in $\mathcal{F}$

$$\frac{1}{2R\|x\|}\| Ax \| \leq n_0 + \| Ax_0 \| = C$$

ove C è una costante. L'ultima diseguglianza implica allora

$$\| Ax \| \leqslant K \| x \| \qquad K = 2RC, \quad \forall\ A \in \mathcal{F}$$

per ogni vettore x appartenente a X cioè

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \| A \| \leqslant K$$

$\square$

Discutiamo ora alcune applicazioni del teorema di Banach Steinhaus

5.4. <u>Proposizione</u> SIANO X, Y e E SPAZI NORMATI E COMPLETI,

$$f : X \times Y \longrightarrow E$$

UN'APPLICAZIONE BILINEARE DI $X \times Y$ IN E.

LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SONO EQUIVALENTI

1) f E' SEPARATAMENTE CONTINUA

2) f E' CONGIUNTAMENTE CONTINUA

3) $\exists$ C > 0 TALE CHE

$$\|f(x,y)\|_E \leq C\|x\|_X \|y\|_Y \qquad \forall x \in X, y \in Y.$$

Dim. Le implicazioni 3) $\Rightarrow$ 2) e 2) $\Rightarrow$ 3) sono ovvie.

Dimostriamo che 1) $\Rightarrow$ 3).

Indichiamo con T_x e R_y rispettivamente gli operatori lineari

$$T_x : y \in Y \longrightarrow f(x,y) \in E$$

$$R_y : x \in X \longrightarrow f(x,y) \in E$$

che sono continui per ipotesi.

Per ogni x appartenente a X

$$\| T_x y \| = \| R_y x \| \leq \| R_y \| \, \| x \|$$

quindi la famiglia

$$\mathfrak{F} = \{ T_x \in \mathcal{B}(Y,E), \ \| x \| \leq 1 \}$$

è limitata in ogni punto e per il principio dell'uniforme limitatezza esiste una costante C tale che

$$\| T_x \| \leq C, \quad \forall \ \| x \| \leq 1$$

da cui

$$\| f(x,y) \| = \| T_x y \| \leq C \| y \|, \quad \| x \| \leq 1, \ x \in X, \ y \in Y$$

che implica per linearità la tesi.

Esercizio Se $\mathfrak{A}$ è un'algebra e $\|\cdot\|$ una norma su $\mathfrak{A}$ che rende il prodotto separatamente continuo allora $\|\cdot\|$ è proporzionale a una norma che verifica la (5.3) ($\mathfrak{A}$ è un'algebra normata).

5.5 Proposizione SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E A_n UNA SUCCESSIONE DI OPERATORI DI $\mathcal{B}(X,Y)$ TALI CHE LA SUCCESSIONE $A_n x$ SIA CONVERGENTE IN Y PER OGNI $x \in X$.

L'OPERATORE LINEARE A DEFINITO DA

$$Ax = \lim_n A_n x , \quad \forall x \in X$$

E' LIMITATO.

Dim. Poichè la successione $A_n x$ è convergente, essa è anche limitata per ogni fissato x in X.

Per il teorema di Banach-Steinhaus esiste una costante $K > 0$ tale che

$$\| A_n \| \leq K \qquad \forall \ n \in \mathbb{N},$$

dunque

$$\| Ax \| = \lim_n \| A_n x \| \leq K \| x \| .$$

$\square$

Nota In $\mathcal{B}(X,Y)$ possiamo introdurre la topologia forte avente la base di intorni dell'origine

$$W_{x_1, \dots x_n, \varepsilon} (0) = \{ A \in \mathcal{B}(X,Y) \ / \ \| A x_i \| < \varepsilon , \ i = 1, \dots, n \} .$$

Questa topologia rende $\mathcal{B}(X,Y)$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso; una subbase di seminorme è data dalle P_x

$$P_x(A) = \| Ax \| , \qquad x \in X \quad , \quad A \in \mathcal{B}(X,Y) .$$

Una successione generalizzata A_α, $\alpha \in I$, converge nella topologia forte ad A se e solo se

$$\lim_\alpha A_\alpha x = Ax, \qquad \forall\, x \in X.$$

La precedente proposizione ci dice che $\mathcal{B}(X,Y)$ (X e Y spazi di Banach) è sequenzialmente completo nella topologia forte.

5.6 Proposizione SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E $\mathcal{F}$ UN SOTTOINSIEME DI $\mathcal{B}(X,Y)$ COMPATTO NELLA TOPOLOGIA FORTE. ALLORA $\mathcal{F}$ E' LIMITATO.

Dim. Per ogni x in X la funzione da $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}$

$$A \in \mathcal{F} \longrightarrow \|Ax\| \in \mathbb{R}$$

è continua, quindi il suo codominio è compatto e quindi limitato. La tesi è allora una diretta conseguenza del principio dell'uniforme limitatezza.

Esercizio Sia X uno spazio di Banach e X il suo duale. I sottoinsiemi di X^* *debolmente compatti sono quelli chiusi (*debolmente) e limitati (in norma).

5.7 Definizione Sia X uno spazio normato e X^* il suo duale.

Un sottospazio chiuso E di X^* si dice determinante se ~~va-le una delle quattro proprietà equivalenti del teorema 4.29~~.

In ciò che ~~segue usiamo i simboli che appaiono nel teore-ma 4.29.~~ $\| j(x)|_E \| = \|x\|$ per $\forall x \in X$, dove j è l'immersione canonica di X in X^{**}.

5.8 Lemma SIANO X E Y DUE SPAZI DI BANACH, $\mathcal{F}$ UN SOTTOINSIEME DI $\mathcal{B}(X,Y)$ e E UN SOTTOSPAZIO DETERMINANTE DI Y^*

SE $\forall\ x \in X$, $\forall\ y \in E$ L'INSIEME

$$\{ \langle y, Ax \rangle \ / \ A \in \mathcal{F} \}$$

E' LIMITATO, ALLORA $\mathcal{F}$ E' LIMITATO IN $\mathcal{B}(X,Y)$.

Dim. Se J è l'immersione canonica di X in X^{**}

$$\sup_{y \in E} \left| \left\langle J(Ax), y \right\rangle \right| < \infty$$

per ogni $x \in X$; il teorema di Banach-Steinhaus implica

$$\sup_{x \in X} \left\| J(Ax) |_E \right\| = \sup_{x \in X} \| J(Ax) \| = \sup_{x \in X} \| Ax \| < \infty$$

e la tesi è ancora conseguenza del teorema di Banach-Steinhaus.

$\square$

ANALITICITA' FORTE E DEBOLE

Sia $\mathcal{D}$ un aperto del piano complesso, X e Y sue spazi di Banach e A(z)

$$z \in \mathcal{D} \longrightarrow A(z) \in \mathcal{B}(X,Y)$$

una funzione di una variabile complesse a valori in $\mathcal{B}(X,Y)$.

Diremo A(z) è una funzione analitica in $\mathcal{D}$ se per ogni $z \in \mathcal{D}$ esiste la derivata

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z+\Delta z \in \mathcal{D}}} \frac{A(z+\Delta z) - A(z)}{\Delta z} \in \mathcal{B}(X,Y)$$

nella topologia della norma di $\mathcal{B}(X,Y)$.

Come vedremo la condizione di analiticità sôpra definita è equivalente a condizioni parecchio più deboli a priori.

Premettiamo il seguente lemma.

5.9 Lemma SIA $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ UNA FUNZIONE COMPLESSA ANALITICA NELL'APERTO $\mathcal{D}$. SIA z_0 UN PUNTO DI $\mathcal{D}$ E $\delta > 0$ TALE CHE $2\delta < d(z_0, \partial\mathcal{D})$.

SE $h \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{C}$ E $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ RISULTA

$$\left| \frac{1}{h-k} \left\{ \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \frac{f(z_0+k)-f(z_0)}{k} \right\} \right| \leq \frac{2}{\delta^2} \max_{|t-z_0|=2\delta} |f(t)| . \tag{5.4}$$

Dim. Applicando la seconda formula integrale di Cauchy all'espressione sotto segno di modulo nel membro sinistro della (5.4) vediamo che questa è uguale a

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} dt\ f(t)\ \frac{1}{(t-z_0)(t-z_0-h)(t-z_0-k)}$$

ove Γ è la circonferenza di centro z_0 e raggio 2δ, quindi possiamo maggiorare il membro sinistro della (5.4) con

$$\frac{1}{2\pi} \frac{4\pi\delta \max_{t\in\Gamma} |f(t)|}{\min_{t\in\Gamma} |(t-z_0)(t-z_0-h)(t-z_0-k)|} = \frac{2}{\delta^2} \max_{t\in\Gamma} |f(t)|$$

$\square$

5.10 Teorema SIANO X E Y SPAZI DI BANACH, $\mathcal{D}$ UN APERTO DEL PIANO COMPLESSO E

$$z \in \mathcal{D} \longrightarrow A(z) \in \mathcal{B}(X,Y)$$

UNA FUNZIONE DI $\mathcal{D}$ A VALORI IN $\mathcal{B}(X,Y)$.

SE ESISTE UN SOTTOSPAZIO E DI Y^* DETERMINANTE TALE CHE $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in E$ LA FUNZIONE NUMERICA

$$z \in \mathcal{D} \longrightarrow \langle y, A(z)x \rangle$$

E' ANALITICA, ALLORA A(z) E' UNA FUNZIONE ANALITICA A VALORI IN $\mathcal{B}(X,Y)$.

Dim. Sia z_o un punto di $\mathcal{D}$ e $\delta > 0$ tale che $2\delta < d(z_o, \partial\mathcal{D})$.

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathcal{B}(X,Y)$

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{h-k} \left(\frac{A(z_o+h)-A(z_o)}{h} - \frac{A(z_o+k)-A(z_o)}{k} \right) \Big/ \begin{matrix} h,k \in \mathbb{C} \\ |h|,|k|<\delta \end{matrix} \right\}.$$

Le ipotesi del teorema e il lemma precedente implicano che $\forall\ x \in X$, $\forall\ y \in E$ l'insieme

$$\left\{ \langle y, Tx \rangle \ , \quad T \in \mathcal{F} \right\}$$

è limitato. Per il lemma 5.8 $\mathcal{F}$ è limitato, quindi esiste una costante $M > 0$ tale che

$$(5.5) \quad \left\| \frac{A(z_o+h)-A(z_o)}{h} - \frac{A(z_o+k)-A(z_o)}{k} \right\| \leq M|h-k|$$

se $|h| < \delta$ e $|k| < \delta$. Ciò implica che se h_n è una successione di numeri complessi convergenti a 0 allora

$$\frac{A(z_o+h_n)-A(z_o)}{h_n}$$

è una successione di Cauchy e quindi per la completezza di $\mathcal{B}(X,Y)$ esiste

$$A'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(z_0+h_n)-A(z_0)}{h_n}$$

Dalla (5.5) tale limite è indipendente dalla successione h_n, cioè $A(z)$ è analitica. □

Il precedente teorema è molto utile perchè permette di estendere i risultati classici di analisi complessa alle funzioni analitiche a valori operatori. Prima di catalogare queste estensioni in una serie di corollari vogliamo osservare come abbia senso definire l'integrale

$$\oint_\Gamma x(z)\,dz$$

ove Γ è una curva regolare del piano complesso e $x(z):\Gamma\to E$ è una funzione continua dalla curva Γ allo spazio di Banach E. Infatti la continuità di $x(z)$ implica che la successione delle somme parziali di Riemann formano una successione di Cauchy e quindi convergente per la completezza di E.

5.11 Corollari

I Sia $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ un aperto, X e Y spazi di Banach e $A(z):\mathcal{D}\to\mathcal{B}(X,Y)$ analitica; allora $A(z)$ è continua ed analitica insieme alle derivate di ogni ordine.

<u>Dim.</u> Poichè $\forall\, x \in X,\ y \in Y^*$ le funzioni

$$z \in \mathcal{D} \longrightarrow (y, A(z)x) \in \mathbb{C}$$

sono analitiche insieme alle loro derivate, applicando il teorema precedente otteniamo la tesi e

$$\frac{d^n}{dz^n}(y, A(z)x) = (y, A^{(n)}(z)x)$$

$\square$

II Supponiamo $\overline{\mathcal{D}}$ compatto avente come frontiera una curva chiusa regolare e $A(z)$ continua su $\overline{\mathcal{D}}$, allora

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} A(z)\,dz = 0 .$$

<u>Dim.</u> Per ogni $x \in X,\ y \in Y^*$

$$\left\langle y, \oint_{\partial\overline{\mathcal{D}}} A(z)\,dz\, x \right\rangle = \oint_{\partial\overline{\mathcal{D}}} \left\langle y, A(z)x \right\rangle dz = 0 .$$

La tesi è conseguenza del teorema di Hahn-Banach.

$\square$

III Nelle ipotesi come sopra

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{A(t)}{t-z}\,dt \tag{5.6}$$

per ogni $z \in \mathcal{D}$ ed inoltre

$$A^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial\overline{\mathcal{D}}} \frac{A(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt \tag{5.7}$$

<u>Dim.</u> Basta ricondursi al caso numerico mediante le formule

$$\langle y, A(z)x \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\overline{\mathcal{D}}} \frac{\langle y, A(t)x\rangle}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \left\langle y, \oint_{\partial\overline{\mathcal{D}}} \frac{A(t)}{t-z}\, dt\, x \right\rangle$$

e la sua analoga (5.7).

$\square$

IV Sia $A(z)$ analitica in un aperto $\mathcal{D}$. Se l'insieme degli zeri di $A(z)$ ammette un punto di accumulazione in $\mathcal{D}$ allora $A(z)$ è identicamente nulla in $\mathcal{D}$, se $\mathcal{D}$ è connesso. Se $B(z)$ è una seconda funzione analitica nell'aperto $\mathcal{D}_1$ tale che $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ e si ha

$$A(z) = B(z) \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}$$

allora la funzione

$$\tilde{A}(z) = \begin{cases} A(z) & \text{se} \quad z \in \mathcal{D} \\ B(z) & \text{se} \quad z \in \mathcal{D}_1 \end{cases}$$

è una funzione analitica in $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_1$.

<u>Dim</u>. Se $A(z_n)=0$, $z_n \in \mathcal{D}$ e $z_n \to z \in \mathcal{D}$, allora per ogni $x \in X$, $y \in Y^*$ la funzione numerica

$$z \in \mathcal{D} \longrightarrow \langle y, A(z)x \rangle \in \mathbb{C}$$

è identicamente nulla per il classico principio di identità delle funzioni olomorfe e pertanto

$$A(z) = 0 \qquad \forall \ z \in \mathcal{D} .$$

Analogamente per dimostrare la seconda affermazione basta osservare che, per argomenti classici di continuazione analitica, la funzione

$$z \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D} \longrightarrow \langle y, A(z)x \rangle \in \mathbb{C}$$

è analitica comunque si scelga x in X e y in Y^*.

La tesi è una conseguenza del teorema 5.10.

$\square$

Il precedente corollario permette di dar senso alla definizione di <u>dominio di analiticità</u>: se $z \in \mathcal{D} \to A(z) \in \mathcal{B}(X,Y)$ è una funzione analitica nell'aperto connesso $\mathcal{D}$, diremo che $\mathcal{D}$

è il dominio di analiticità di A(z) se A(z) non ammette continuazioni analitiche fuori di $\mathcal{D}$, ossia non esiste nessuna estensione analitica propria di A(z) su un aperto connesso contenente $\mathcal{D}$.

Prima di passare al prossimo corollario precisiamo che cosa debbe intendersi per assoluta convergenza. Se x_n $(n=0,1,\ldots)$ è una successione di vettori di uno spazio di Banach diremo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è <u>assolutamente convergente</u> se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| x_n \| < \infty$$

Se tale serie è assolutamente convergente essa è anche convergente perchè le somme parziali formano una successione di Cauchy.

V Sia $A(z) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ analitica nell'aperto $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$.

Se $z_0 \in \mathcal{D}$ e $0 < r < d(z_0, \partial\mathcal{D})$ allora

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \tag{5.8}$$

ove la convergenza della serie di Taylor è assoluta e uniforme per $|z-z_0| < r$.

Viceversa se la serie

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z-z_0)^n , \qquad B_n \in \mathcal{B}(X,Y) \tag{5.9}$$

è assolutamente per $|z-z_0|<R$, $R>0$, allora $B(z)$ è una funzione analitica nel cerchio $\{z/|z-z_0|<R\}$ e

$$B_n = \frac{B^{(n)}(z_0)}{n!} \ ;$$

abbiamo pertanto

$$d(z_0,\partial\mathcal{D}_1)^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|B_n\|^{1/n}$$

ove $\mathcal{D}_1$ è il dominio di analiticità di $B(z)$.

Dim. Se $0<r<d(z_0,\partial\mathcal{D})$ allora $\|A(z)\|$ è una funzione continua e quindi limitata sulla circonferenza $C^r_{z_0} = \{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|=r\}$; se scegliamo z tale che $|z-z_0|<r$

$$\frac{A(t)}{t-z} = \frac{A(t)}{t-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A(t)}{(t-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

ove la convergenza è uniforme per $t\in C^r_{z_0}$. Integrando membro a membro su $C^r_{z_0}$ la serie e usando la (5.6) e la (5.7) otteniamo la (5.8).

Viceversa se vale la (5.9) integrando i termini di tale relazione membro a membro su un'arbitraria curva regolare chiusa contenuta in $\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<R\}$ vediamo che la for-

mula integrale di Cauchy (5.6) è valida per B(z) da cui è facile ottenere la tesi.

Notiamo ora che il raggio di assoluta convergenza della (5.9) ossia il raggio di convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| B_n \| \, (z-z_0)^n$$

è uguale all'inverso di $\overline{\lim_{n\to\infty}} \| B_n \|^{1/n}$; per il primo punto sappiamo che

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| B_n \|^{1/n} \leqslant d(z_0, \partial\mathcal{D}_1) ,$$

ma la disuguaglianza non può valere in senso stretto perchè altrimenti la (5.9) convergerebbe assolutamente anche in punti non appartenenti a $\mathcal{D}_1$ e quindi per il secondo punto B(z) ammetterebbe una continuazione analitica fuori di $\mathcal{D}_1$.

$\square$

VI Sia A(z) una funzione a valori in B(X,Y) analitica nella corona circolare $C = \{ z / 0 < r < |r-r_0| < R \}$.

Allora A(z) è sviluppabile in serie di Laurent all'interno di C:

$$A(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-z_0)^n , \qquad A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{A(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt , \tag{5.10}$$

ove Γ è una curva regolare chiusa contenuta in C che racchiuda z_o. La convergenza è uniforme e assoluta in ogni sottocorona circolare chiusa di C.

<u>Dim.</u> Analoga alla precedente.

$\square$

Supponiamo ora che A(z) sia analitica in $\mathcal{D} - z_o$, $z_o \in \mathcal{D}^\circ$, ossia esista un punto isolato di non analiticità. Per il corollario VI possiamo sviluppare A(z) in serie di Laurent ottenendo la (5.10).

Diremo che z_o è una <u>singolarità eliminabile</u> se $\{A_n, n<0\} = \{0\}$, in tal caso ovviamente A(z) ammette una continuzazione analitica su $\mathcal{D}$; diremo che z_o è una <u>singolarità</u> e $\{A_n, n<0\} \neq \{0\}$; diremo che z_o è un <u>polo</u> se esiste un intero $m<0$ tale che $\{A_n, n<m\} = \{0\}$; diremo infine che z_o è una <u>singolarità essenziale</u> se è una singolarità non polare.

Osserviamo infine che se E è uno spazio di Banach, identificando E con un sottospazio chiuso di E^{**} possiamo rienunciare i precedenti teoremi per funzioni analitiche a valori in E.

5.12 TEOREMA DELL'APPLICAZIONE APERTA

Siano X e Y due spazi di Banach e $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ una applicazione lineare limitata di A su Y.

In tali ipotesi A è aperta, ossia manda aperti di X in aperti di Y.

Dim.

Cominciamo con l'osservare che, poichè le palle aperte di uno spazio normato formano una base per la sua topologia, è sufficiente mostrare che l'immagine di una qualunque palla aperta di X è un aperto di Y ossia per ogni $x \in X$

$$\forall \delta > 0, \ \exists \ \delta_1 > 0 \ / \ AB^X_{x,\delta} \supseteq B^Y_{Ax,\delta_1}$$

ove $B^X_{x,\delta} = \{ z \in X / \| z - x \| < \delta \}$.

Ma per linearità $AB^X_{x,\delta} = Ax + AB^X_\delta$ (indichiamo come al solito $B^X_{0,\delta}$ con B^X_δ) e quindi è sufficiente provare che

$$\forall \delta > 0, \ \exists \ \delta_1 > 0 \ / \ AB^X_\delta \supseteq B^Y_{\delta_1}$$

e quindi, ancora per linearità, dobbiamo solo mostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

(5.11) $$AB^X_1 \supset B^Y_\varepsilon .$$

Passiamo quindi a dimostrare la (5.11).

Poichè A è un'applicazione suriettiva

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} AB_n^X .$$

Per il teorema di <u>Baire</u> esiste un intero n_o tale che $\overline{AB_{n_o}^X}$ abbia un punto interno, cioè esista $\delta > 0$ tale che

$$\overline{AB_{n_o}^X} \supseteq B_{y_o,\delta}^Y$$

per un certo $y_o \in Y$. Se scegliamo $x_o \in X$ tale che $y_o = Ax_o$

$$\overline{A(-x_o + B_{n_o}^X)} = -y_o + \overline{AB_{n_o}^X} \supseteq B_\delta^Y$$

e poichè $-x_o + B_{n_o}^X$ è un insieme limitato esiste un intero m tale che

$$\overline{AB_m^X} \supseteq B_\delta^Y$$

e quindi per linearità

(5.12) $$\overline{AB_1^X} \supseteq B_\alpha^Y , \qquad \alpha = \frac{\delta}{m} .$$

Se dimostrassimo l'esistenza di un intero n tale che

(5.13) $$\overline{AB_1^X} \subseteq AB_n^X$$

la (5.13) e la (5.12) implicherebbero la (5.11) ossia la tesi.

Dimostriamo allora la (5.13).

Sia $y \in \overline{AB_1^X}$: esiste $x_1 \in B_1^X$ tale che $y - Ax_1$ sia così "piccolo" da stare in $\overline{AB_{1/2}^X}$: infatti per la (5.12)

$$\|y - Ax_1\| \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow y - Ax_1 \in \overline{AB_{1/2}^X} .$$

Iterando il ragionamento possiamo scegliere $x_2 \in B_{1/2}^X$ in modo tale che

$$\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{\alpha}{2^2} \quad \& \quad y - Ax_1 - Ax_2 \in \overline{AB_{1/2^2}^X}$$

e quindi per induzione trovare una successione $x_n \in X$ tale che

(5.14) $$\|x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} , \quad \|y - A(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\| \leq \frac{\alpha}{2^n} ,$$

dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è assolutamente convergente e, essendo X completo, esiste $x \in X$ tale che

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n , \qquad \|x\| \leq 2$$

da cui $x \in \overline{B_2^X} \subset B_3^X$ e, per la continuità di A la (5.14) implica

$$y = Ax$$

ossia $y \in AB_3^X$. Abbiamo quindi dimostrato che $\overline{AB_1^X} \subset AB_3^X$ ossia la (5.13).

$\square$

Se X e Y sono due spazi vettoriali e A un operatore lineare di X in Y poniamo

$$R(A) = \{Ax,\ x \in X\}$$
$$n(A) = \{x \in X \,/\, Ax=0\}$$

per indicare rispettivamente il codominio e il nucleo di A.

5.13. Corollario. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ TALE CHE

$$n(A) = \{0\}, \qquad R(A) = Y,$$

OSSIA A E' INIETTIVO E SURIETTIVO.
ALLORA A^{-1} E' LIMITATO, OSSIA $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$.

Dim. Per il teorema precedente A è aperto, quindi A^{-1} è continuo.

$\square$

5.14. Corollario. SIA X UNO SPAZIO VETTORIALE, $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_2$ DUE NORME CHE INDUCONO SU X LE TOPOLOGIE RISPETTIVAMENTE τ_1 E τ_2.
SUPPONIAMO CHE (X,τ_1) e (X,τ_2) SIANO SPAZI DI BANACH.
ALLORA SE UNA TOPOLOGIA E' PIU' DEBOLE DELL'ALTRA LE DUE TOPOLOGIE COINCIDONO.

Dim. La funzione identica è continua in un verso, quindi è un omeomorfismo.

$\square$

NOTA: Esistono spazi di Banach, sullo stesso spazio vettoriale sostegno, che hanno topologie non comparabili.

TEOREMA DEL GRAFICO CHIUSO

In seguito avremo modo di considerare operatori lineari tra spazi normati non definiti ovunque e illimitati e pertanto dobbiamo dare alcune definizioni.

Siano X e Y spazi vettoriali normati. Lo spazio vettoriale normato $X \oplus Y$, somma diretta di X e Y, è il prodotto cartesiano $X \times Y$ munito delle operazioni

$$(x,y) + (x',y') = (x+x',y+y')$$
$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

ove (x,y) e (x',y') appartengono a $X \times Y$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, e della norma

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \tag{5.15}$$

o di una norma equivalente quale, per esempio,

$$\|(x,y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2} \tag{5.16}$$

data l'equivalenza delle norma in $\mathbb{C}^2$; comunque se sarà necessario quali delle due norme prendere in considerazione chiameremo $\|\cdot\|_1$

la (5.15) e $\|\cdot\|_2$ la (5.16).

Tramite le applicazioni lineari

$$x \in X \longrightarrow (x,0) \in X \oplus Y,$$
$$y \in Y \longrightarrow (0,Y) \in X \oplus Y,$$

che risultano essere isometrie per le norme (5.15) e (5.16), possiamo identificare X con il sottospazio di $X \oplus Y$ delle coppie aventi il secondo elemento nullo e compiere l'analoga identificazione per Y. Poniamo inoltre

$$x \oplus y = (x,y) \qquad x \in X, \quad y \in Y .$$

Se consideriamo le proiezioni

$$P_X : x \oplus y \in X \oplus Y \longrightarrow x \in X$$
$$P_Y : x \oplus y \in X \oplus Y \longrightarrow y \in Y$$

è elementare osservare che la topologia di $X \oplus Y$ è la topologia debole definita da P_X e P_Y; ossia la topologia prodotto di $X \times Y$. Nel caso in cui X e Y sono spazi di Banach allora $X \oplus Y$ è uno spazio di Banach.

Sia ora A un operatore lineare definito su un sottospazio di X e a valori in Y; poniamo

$$\mathcal{D}_A = \{ x \in X / Ax \text{ è definito} \} = \text{dominio di } A,$$
$$R(A) = \{ Ax \in Y / x \in \mathcal{D}_A \} = \text{codominio di } A,$$
$$G_A = \{ x \oplus y \in X \oplus Y / x \in \mathcal{D}_A \,\&\, y = Ax \} = \text{grafico di } A,$$
$$n(A) = \{ x \in \mathcal{D}_A / Ax = 0 \} = \text{nucleo di } A,$$

G_A è un sottospazio di $X \oplus Y$ tale che

$$z \in G_A \,\&\, P_X z = 0 \Rightarrow z = 0. \tag{5.17}$$

Viceversa la precedente implicazione caratterizza i sottospazi di $X \oplus Y$ che sono grafici di operatori lineari, cioè se M è un sottospazio lineare di $X \oplus Y$ tale che

$$n(P_X|_M) \equiv M \cap Y = \{0\}$$

allora M è il grafico di un operatore lineare T da X in Y e si ha

$$T = P_Y \circ (P_X|_M)^{-1}. \tag{5.18}$$

5.15. __Definizione__: Siano X e Y spazi normati e $T : \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow R(T) \subset Y$ un operatore lineare. T si dice __chiuso__ se G_T è un sottospazio chiuso di $X \oplus Y$.

Dalla precedente definizione discende immediatamente il seguente criterio: T è chiuso se e solo se, per $n \in \mathbb{N}$,

$$(5;19) \qquad \left.\begin{array}{l} x_n \in \mathcal{D}_T \\ x_n \to x \\ Tx_n \to y \end{array}\right\} \Longrightarrow x \in \mathcal{D}_T \ \& \ y = Tx \ ;$$

infatti la (5.19) non dice altro che: per qualunque successione $z_n \in G_T$ tale che $z_n \to z \in X \oplus Y$ risulta $z \in G_T$.

5.16 <u>Teorema</u> (DEL GRAFICO CHIUSO) SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E A UN OPERATORE LINEARE <u>CHIUSO</u> DA X IN Y. LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI

i) $\mathcal{D}_A$ E' CHIUSO;

ii) A E' CONTINUO.

<u>Dim.</u> ii) $\Rightarrow$ i): Mediante l'applicazione

$$x \in \mathcal{D}_A \longrightarrow x \oplus Ax \in G_A$$

possiamo stabile per la (5.17) una biiezione tra $\mathcal{D}_A$ e G_A; quindi possiamo munire $\mathcal{D}_A$ della <u>topologia del grafico</u> di A ossia della topologia relativa di G_A in $X \oplus Y$, che è data dalla norma

$$|||x||| = \|x\| + \|Ax\| , \qquad x \in \mathcal{D}_A$$

e che indicheremo con $\mathcal{T}_{G_A}$. In generale $\mathcal{T}_{G_A}$ è una topologia <u>più forte</u> della topologia relativa su $\mathcal{D}_A$, ma se A è continuo $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ sono norme equivalenti. Poichè A è chiuso $\{\mathcal{D}_A, \mathcal{T}_{G_A}\}$ è uno spazio di Banach quindi $\mathcal{D}_A$ è completo ossia chiuso.

i) $\Rightarrow$ ii) Se $\mathcal{D}_A$ è chiuso allora $\mathcal{D}_A$ è uno spazio di Banach nelle norme $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ e poichè $\mathcal{T}_{G_A}$ è più forte di $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ per il corollario 5.14 esiste una costante $c>0$ tale che

$$|||x||| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}_A$$

ossia

$$\|Ax\| \leq (c-1)\|x\|$$

e A è continuo. $\square$

Avvertiamo che la precedente dimostrazione vale anche nel caso in cui X e Y siano spazi di Frèchet. Se X e Y sono due spazi di Banach indichiamo con $\mathcal{C}(X,Y)$ l'insieme degli operatori lineari chiusi da X in Y.

5.17. <u>Proposizione</u> SE A $\in \mathcal{C}(X,Y)$ E $n(A) = \{0\}$ ALLORA $A^{-1} \in \mathcal{C}(Y,X)$

<u>Dim</u>. L'applicazione lineare

$$V: x \oplus y \in X \oplus Y \longrightarrow y \oplus x \in Y \oplus X$$

è una isometria e stabilisce quindi un omeomorfismo tra $X \oplus Y$ e $Y \oplus X$

Ovviamente

$$G_{A^{-1}} = V\, G_A$$

quindi $G_{A^{-1}}$ è chiuso se e solo se lo è G_A. □

5.18 Corollario. SIA $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ E $n(A) = \{0\}$. $A^{-1}: R(A) \to X$ E' CHIUSO. □

Esempio. Sia $X = C[0,1]$ e $T \in \mathcal{B}(X)$ definito da $(Tf)(x) = xf(x)$. L'operatore lineare T^{-1} definito da $(T^{-1}g)(x) = x^{-1}g(x)$, $g \in R(T)$ è chiuso.

5.19. Corollario. SIA $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $n(T) = \{0\}$, $R(T)$ CHIUSO. ALLORA T^{-1} E' CONTINUO. □

Esercizi. Usando il criterio (5.19) dimostrare che i seguenti operatori lineari sono chiusi.

a) Sia $X = Y = C_0(\mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che si annullano all'infinito,

$$\mathcal{D}_T = \{x \in X \,/\, z \to zx(z) \in X\}$$

$$T : \mathcal{D}_T \to X, \quad (Tx)(z) = zx(z).$$

b) Sia $X=Y=C_o(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ che si annullano all'infinito,

$$\mathcal{D}_T = \{x \in X / x'(t) \in C_o\}$$

$$T : \mathcal{D}_T \to X \; , \; (Tx)(t) = x'(t).$$

Notare che gli operatori di moltiplicazione per z e di derivazione diventano continui se li facciamo operare nello spazio $\mathcal{S}$ definito nel capitolo IV Esercizio 2.

5.19. <u>Definizione</u>. Siano X e Y spazi di Banach e $T:\mathcal{D}_T \subset X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. Diremo che T è <u>chiudibile</u> se $\overline{G_T}$ è il grafico di un operatore lineare.

In altre parole T è chiudibile se ammette un estensione chiusa: la minima estensione chiusa $\overline{T}$ dell'operatore chiudibile T è tale che $G_{\overline{T}}=\overline{G_T}$, cioè

$$\overline{T} = P_Y \circ (P_X|_{\overline{G_T}})^{-1}$$

Tenuto conto della (5.17) abbiamo il seguente criterio di chiudibilità: $T: \mathcal{D}_T \subset X \longrightarrow Y$ è chiudibile se e solo se

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in \mathcal{D}_A \,,\; n \in \mathbb{N} \\ x_n \longrightarrow 0 \\ Tx_n \longrightarrow y \in Y \end{array}\right\} \Longrightarrow \; y = 0,$$

infatti la precedente implicazione è equivalente a:

$$0 \oplus y \in \overline{G_T} \Rightarrow y = 0$$

Un operatore continuo T è ovviamente chiudibile e risulta $\mathcal{D}_{\overline{T}} = \overline{\mathcal{D}_T}$.

SOMMA DIRETTA DI SPAZI DI BANACH

Abbiamo precedentemente definito lo spazio di Banach $X \oplus Y$ somma diretta degli spazi di Banach X e Y; in questo paragrafo vogliamo studiare condizioni affinchè uno spazio di Banach sia somma diretta di due suoi sottospazi.

Se X è uno spazio vettoriale e M e N sono due sottospazi di X, M e N si dicono algebricamente complementari se sono verificate le seguenti condizioni:

$$M \cap N = \{0\},$$
(5.20)
$$M + N = X.$$

In tal caso ogni vettore $x \in X$ si decompone unicamente nella somma di due vettori $x=m+n$, $m \in M$, $n \in N$, quindi

$$X \simeq M \oplus N$$

ove $\simeq$ significa algebricamente isomorfo e $M \oplus N$ è la somma diretta algebrica.

Se X è uno spazio normato, M e N saranno sottospazi normati di X e quindi potremo formare lo spazio normato somma diretta $M \oplus N$ la cui topologia coinciderà con la topologia prodotto di $M \times N$, che in generale sarà una topologia più forte di quella di X, infatti:

$$\|m+n\| \leq \|m\| + \|n\| = \|m \oplus n\| . \tag{5.21}$$

5.20. Definizione.-

Sia X uno spazio normato e M e N sottospazi lineari di X verificanti la (5.20), ossia algebricamente complementari. M e N si dicono topologicamente complementari se l'isomorfismo canonico

$$m \oplus n \in M \oplus N \longrightarrow m+n \in X \tag{5.22}$$

è un omeomorfismo (isomorfismo topologico).

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert e M è un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$ allora M e $M^{\perp}$ sono topologicamente complementari, infatti l'isomorfismo canonico tra $\mathcal{H}$ e $M \oplus M^{\perp}$ è una isometria, quando si consideri su $M \oplus M^{\perp}$ la norma $\|\cdot\|_2$ data dalla (5.16).

5.21. Proposizione. SIA X UNO SPAZIO NORMATO, M E N DUE SOTTOSPAZI LINEARI ALGEBRICAMENTE COMPLEMENTARI. SONO EQUIVALENTI

i) M E N SONO TOPOLOGICAMENTE COMPLEMENTARI;

ii) P_M E' CONTINUA;

iii) $d(S_1^M, N) > 0$.

Se vale una delle tre

$$\| P_M \| = d(S_1^M, N)^{-1} \tag{5.23}$$

(non ha importanza quale delle norme $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_2$ si consideri su $M \oplus N$).

<u>Dim</u>. i) $\Leftrightarrow$ ii) Se M e N sono topologicamente complementari la topologia di X é la topologia di $M \times N$ e quindi P_M è continua. Viceversa se P_M è continua anche $P_N = I - P_M$ è continua, quindi la topologia di X è più forte della topologia di $M \times N$ e quindi coincide con essa per la (5.21).

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Risulta

$$\| P_M \| = \sup_{\substack{m \in M \\ n \in N}} \frac{\|m\|}{\|m+n\|} = \sup_{\substack{m_1 \in S_1^M \\ n \in N}} \frac{1}{\|m_1+n\|} = \left[\inf_{\substack{m_1 \in S_1^M \\ n \in N}} \|m_1 - n\| \right]^{-1}$$

quindi otteniamo la (5.23) e quindi

$$\| P_M \| < \infty \iff d(S_1^M, N) > 0 .$$

$\square$

5.22. Teorema. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, M E N SOTTOSPAZI LINEARI ALGEBRICAMENTE COMPLEMENTARI. SONO EQUIVALENTI:

i) M E N SONO TOPOLOGICAMENTE COMPLEMENTARI;

ii) M E N SONO SOTTOSPAZI CHIUSI.

Dim. i) $\Rightarrow$ ii) E' semplice consiguenza della continuità di P_M e P_N.

ii) $\Rightarrow$ i) L'isomorfismo canonico

$$X \longrightarrow M \oplus N$$

è continuo ed è una biiezione, allora per il corollario 5.13 anche l'inverso è continuo.

$\square$

Un sottospazio lineare chiuso di uno spazio di Banach ammette sempre un complementare topologico? La risposta è no: per esempi di tal genere si può consultare Kothe, Topological vector Space, §31. Vale però la seguente proposizione.

5.23. Proposizione. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, M UN SOTTOSPAZIO LINEARE DI X

i) SE M E' CHIUSO E

$$\text{codim } M = \dim X/_M < \infty \tag{5.24}$$

ALLORA M AMMETTE UN COMPL. TOPOL.;

ii) SE

(5.25) $$\dim M < \infty$$

M AMMETTE UN COMPL. TOPOL..

<u>Dim.</u> i) M ammette un compl. algebrico che per la (5.24) è di dimensione finita, quindi chiuso.

ii) Sia dim M=n e $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ una base di M. Per ogni i=1,2,...n il funzionale

$$f_i: \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \longrightarrow \lambda_i$$

è un elemento di M^*, quindi esistono

$$\tilde{f}_i \in X^*, \; \tilde{f}_i\big|_M = f_i \;\Rightarrow\; \langle \tilde{f}_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

L'operatore lineare $P: X \longrightarrow X$

$$P: x \in X \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \langle f_j, x \rangle x_j \in M$$

è dunque continuo e $P^2=P$, cioè è un proiettore limitato con norma

$$\| P \| \leq \sum_{j=1}^{n} \| f_j \| \| x_j \|$$

e la tesi segue dalla proposizione 5.21.

5.24. Corollario. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, M UN SOTTOSPAZIO CHIUSO DI X E N UN SOTTOSPAZIO DI X DI DIMENSIONE FINITA.
IL SOTTOSPAZIO

$$M + N = X_1$$

E' CHIUSO.

Dim. Se N_1 è un complementare di $M \cap N$ in N, ossia

$$N = N_1 \oplus M \cap N$$

risulta

$$M+N_1 = M+N \quad , \quad M \cap N_1 = \{0\}$$

quindi M e N_1 sono algebricamente complementari.

Poichè $\dim N_1 < \infty$, la sfera unitaria di N_1, $S_1^{N_1}$, è compatta.
La funzione

$$x \in S_1^{N_1} \longrightarrow d(x,M) \in \mathbb{R}^+$$

è una funzione continua a valori strettamente positivi perchè

$$S_1^{N_1} \cap M = \emptyset \quad \text{e } M \text{ è chiuso,}$$

quindi il suo minimo è positivo, ossia

$$d(S_1^{N_1}, M) > 0$$

e per la proposizione 5.21

$$X_1 \sim M \oplus N_1$$

per cui X_1 è uno spazio di Banach, quindi chiuso.

$\square$

Diamo ora una stima delle norme dei proiettori su sottospazi a dimensione o codimensione dinita.

5.25. Proposizione. SIA X UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO, $N \subset X$ UN SOTTOSPAZIO LINEARE A DIMENSIONE FINITA, $M \subset X$ UN SOTTOSPAZIO LINEARE CHIUSO A CODIMENSIONE FINITA.

ALLORA:

i) $\inf \{ \|P\| \, ; \, P = P^2, \, R(P) = N \} \leq \dim N$ (*)

ii) $\inf \{ \|I - Q\| \, ; \, Q = Q^2, \, R(Q) = M \} \leq \operatorname{codim} M$

Dim. Sia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base per N; come abbiamo fatto nella proposizione 5.23, possiamo trovare una base duale di N^*, cioè

$$\{f_1, \ldots f_n\} \in N^* \; / \; \langle f_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

ed estendere ogni f_i a dei funzionali $\tilde{f}_i \in X^*$ con $\|\tilde{f}_i\| = \|f_i\|$.

Se consideriamo, con ovvio significato dei simboli,

(*) La stima è migliorabile [illegible]

$$P = \sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{f}_j ,$$

P è un proiettore su N con norma

$$\| P \| \leq \sum_{j=1}^{n} \| x_j \| \| f_j \| .$$

Analogamente se $\{ f_1, \dots f_n \}$ è una base di $M^{\perp}$ possiamo trovare $\{ x_1, \dots x_n \} \subset X$ che sia una base duale

$$\langle f_i, x_j \rangle = \delta_{ij} .$$

e ponendo

$$I-Q = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j ,$$

l'operatore $Q \in \mathcal{B}(X)$ è un proiettore su M tale che

$$\| Q \| \leq \sum_{j=1}^{n} \| x_j \| \| f_j \| ;$$

dunque in entrambi i casi ci è sufficiente dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere $\{ f_1, \dots, f_n \}$ in modo che

$$\| f_i \| \| x_i \| \leq 1 + \varepsilon .$$

i) Sia $\{ x_1, x_2 \dots x_n \}$ una base per N tale che $\| x_i \| = 1$ $(i=1, \dots n)$ e sia

$$\delta : (f_1,\dots f_n) \in \bar{B}_1^{X^*} \times \dots \times \bar{B}_1^{X^*} \longrightarrow |\det(\langle f_k, x_i\rangle)| \in \mathbb{R}.$$

Se $\bar{B}_1^{X^*} \times \dots \times \bar{B}_1^{X^*}$ è munito della topologia prodotto della topologia $*$-debole su $\bar{B}_1^{X^*}$ allora $\bar{B}_1^{X^*} \times \dots \times \bar{B}_1^{X^*}$ diviene uno spazio topologico compatto per il teorema di Alaoglu e per il teorema di Tychonov; inoltre la funzione δ diviene continua. Sia $\{g_1,\dots g_n\} \in \bar{B}_1^{X^*} \times \dots \times \bar{B}_1^{X^*}$ un punto in cui δ assume il massimo, certamente positivo dato che δ assume un valore positivo sulla base duale.

Se $\{y_1,\dots,y_n\} \in N^n$ formano la soluzione unica del sistema di equazioni

$$\sum_{j=1}^{n} \langle g_j, x_i\rangle \, y_j = x_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

risulta

$$\langle g_k, y_j\rangle = \delta_{kj} .$$

Poichè

$$\sum_{j=1}^{n} \langle f_k, y_j\rangle \langle g_j, x_i\rangle = \langle f_k, x_i\rangle , \qquad f_k \in \bar{B}_1^{X^*},$$

per il teorema di moltiplicazione per i determinanti

$$\delta(g_1,\dots g_n) \left|\det(\langle f_k, y_j\rangle)\right| = \delta(f_1,\dots,f_n)$$

da cui

$$\left|\det(\langle f_k, y_j\rangle)\right| \leqslant 1$$

Ponendo nell'ultima disuguaglianza

$$f_k = g_k \quad \text{se} \quad k \neq j, \quad f_k = f \quad \text{se} \quad k = j$$

otteniamo

$$|\langle f, y_i\rangle| \leqslant 1 \qquad \forall\ f \in \overline{B}_1^{X^*} \Rightarrow \|y_i\| \leqslant 1$$

e poichè $\|g_i\| \leqslant 1$ per ipotesi, gli g_i formano una base duale di y_i tale che

$$\|g_i\|\ \|y_i\| \leqslant 1 .$$

ii) Sia $\{g_1, \dots g_m\}$ una base per $M^{\perp}$ e si ponga

$$= \sup\left\{\left|\det(\langle g_i, y_j\rangle)\right| \;;\; y_1 \dots y_m \quad \overline{B}_1^{X^*}\right\}.$$

Scelto $\varepsilon > 0$ esiste $\{x_1 \dots x_m\} \in \overline{B}_1^{X^*} \times \dots \times \overline{B}_1^{X^*}$ tale che

$$(1+\varepsilon)\left|\det(\langle g_i, x_j\rangle)\right| \geqslant \delta.$$

Siano $f_1, f_2, \dots f_m$ elementi di $M^{\perp}$ tali che

$$\langle f_i, x_j\rangle = \delta_{ij} ,$$

ragionando come in i) otteniamo

$$\left|\det\left(\langle f_i, y_j\rangle\right)\right| \leq \lambda+\varepsilon$$

che implica $\|f_k\| \leq 1+\varepsilon$ $(k=1,\dots,m)$.

Poichè $\|x_i\| \leq 1$ abbiamo quindi

$$\|f_i\|\,\|x_i\| \leq 1+\varepsilon \qquad (i=1,\dots m)$$

$\square$

Concludiamo questo paragrado con una proposizione che ci sa rà utile in seguito.

5.26. Proposizione. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH; ALLORA

$$(X\oplus Y)^* \simeq X^*\oplus Y^*$$

OVE IL SEGNO $\simeq$ SIGNIFICA "ISOMETRICAMENTE EQUIVALENTE", QUANDO USIAMO LA NORMA (5.16) NELLA SOMMA DIRETTA DEI DUE SPAZI.

Dim. Vogliamo dimostrare le seguenti:

i) l'applicazione

$$f\oplus g \in X^*\oplus Y^* \longrightarrow \varphi(f\oplus g)\in (X\oplus Y)^*$$

$$\langle\varphi(f\oplus g),\, x\oplus y\rangle = \langle f,x\rangle + \langle g,y\rangle, \quad x\oplus y\in X\oplus Y$$

è un isomorfismo di $X^*\oplus Y^*$ su $(X\oplus Y)^*$;

ii) φ è isometrico, ossia

$$\|\varphi(f\oplus g)\| = \|f\oplus g\| = (\|f\|^2+\|g\|^2)^{1/2}.$$

Nella i) è immediato che φ sia un isomorfismo, d'altra parte se $F\in(X\oplus Y)^*$

$$\langle F, x\oplus y\rangle = \langle F\circ P_X, x\rangle + \langle F\circ P_Y, y\rangle \quad , \qquad x\oplus y\in X\oplus Y$$

e quindi φ è suriettiva.

Per dimostrare la ii) si osservi che

$$|\langle\varphi(f\oplus g), x\oplus y\rangle| \leq |\langle f,x\rangle| + |\langle g,y\rangle| \leq \|f\|\|x\| + \|g\|\|y\| \leq$$

$$\leq (\|f\|^2+\|g\|^2)^{1/2}(\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2} = \|f\oplus g\|\,\|x\oplus y\|$$

ossia

$$\|\varphi(f\oplus g)\|\leq\|f\oplus g\|, \tag{5.26}$$

inoltre, per ogni $f\in X^*$, $g\in Y^*$, $\varepsilon>0$ esistono $x\in X$ e $y\in Y$ tali che

$$\|x\| = \|f\|\ , \|y\| = \|g\|\ , \langle f,x\rangle \geq (1-\varepsilon)\|f\|^2, \ \langle g,y\rangle\geq(1-\varepsilon)\|g\|^2$$

da cui

$$|\langle\varphi(f\oplus g), x\oplus y\rangle| \geq (1-\varepsilon)(\|f\|^2+\|g\|^2) = (1-\varepsilon)\|f\oplus g\|\|x\oplus y\|$$

e quindi vale anche la relazione opposta alla (5.26). □

V.2. Operatori chiusi: chiudibilità e trasposto; teorema del codominio chiuso di Banach; spettro ed indice di un operatore e del trasposto.

Siano X e Y spazi normati e

$$T : \mathcal{D}_T \subset X \longrightarrow Y$$

un operatore lineare densamente definito i.e. $\overline{\mathcal{D}_T} = X$.

Definiamo l'insieme

$$\mathcal{D}_{T'} = \{y' \in Y^* \,/\, x \in \mathcal{D}_T \to \langle y', Tx\rangle \in \mathbb{C} \text{ è continua}\}.$$

$\mathcal{D}_{T'}$ è non vuoto, infatti $0 \in \mathcal{D}_{T'}$, ed è un sottospazio lineare di Y. Poichè $\overline{\mathcal{D}_T}^* = X^*$

$$y' \in \mathcal{D}_{T'} \Longleftrightarrow \exists x' \in X^* \,/\, \langle y', Tx\rangle = \langle x', x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}_T,$$

ovviamente x' è unico ed è individuato da y'.

5.27 <u>Definizione.</u> L'operatore lineare

$$T' : \mathcal{D}_{T'} \subset Y^* \longrightarrow X^*, \qquad T'y' = x'$$

è detto operatore trasposto dell'operatore T.

5.28 Proposizione. SE T APPARTIENE A $\mathcal{B}(X,Y)$ ALLORA T' APPARTIENE A $\mathcal{B}(Y^*,X^*)$ E SI HA

$$\|T\| = \|T'\|.$$

Dim. Poichè T è continuo $\mathcal{D}_{T'}=Y^*$ e

$$|\langle T'y',x\rangle| = |\langle y',Tx\rangle| \leq \|y'\| \; \|T\| \, \|x\| \quad , \qquad x\in X,\ y'\in Y^*$$

da cui

$$\|T'y'\| \leq \|T\| \; \|y'\| , \qquad \forall\, y'\in Y^* \Rightarrow \|T'\| = \|T\| .$$

D'altra parte per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un vettore $x \in B_1^X$ tale che

$$\langle y',Tx\rangle \geq \|T\| - \varepsilon ,$$

inoltre, per il teorema di Hahn-Banach, esiste $y'\in B_1^{Y^*}$ tale che

$$\langle y',Tx\rangle = \|Tx\|$$

dunque

$$\langle T'y',x\rangle \geq \|T\| - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|T'y'\| \geq \|T\| - \varepsilon \Rightarrow \|T'\| \geq \|T\|$$

$\square$

Vogliamo riformulare la definizione di T', operatore lineare trasposto dell'operatore lineare densamente definito T, in termini del grafico di T e T'.

Introduciamo l'isometria

$$V : x \oplus y \in X \oplus Y \rightarrow y \oplus -x \in Y \oplus X ,$$

una semplice verifica mostra che: (si veda prop.5.26)

$$V' : y' \oplus x' \in Y^* \oplus X^* \longrightarrow -x' \oplus y' \in X^* \oplus Y^*.$$

Discende immediatamente dalla definizione di T' che il grafico di T' consiste nei vettori

$$y' \oplus x' \in Y^* \oplus X^* \quad \text{tali che} \quad \langle y', Tx \rangle = \langle x', x \rangle , \quad \forall x \in \mathcal{D}_T$$

ossia

$$G_{T'} = \left\{ y' \oplus x' \in Y^* \oplus X^* / x' \oplus -y' \perp G_T \right\} = V'(G_T^{\perp}) = (VG_T)^{\perp}$$

e quindi $G_{T'}$ è un sottospazio lineare chiuso di $Y^* \oplus X^*$ che è quanto dire che T' è un operatore lineare <u>chiuso</u>. E' bene notare che $G_{T'}$ è chiuso non soltanto nella topologia uniforme, ma anche nella topologia $*$-debole di $Y^* \oplus X^*$.

Appare chiaro dalla definizione che la nozione di trasposto dipende dalla dualità di X, X^* e di Y, Y^* . Particolare interesse, nel caso di operatori lineari da Y^* in X^* , è nella definizione di trasposto relativo alla dualità di Y^*, Y e di X^*, X, che sarà un operatore lineare da X in Y.

Sia allora R un operatore lineare da Y^* in X^* tale che $\mathcal{D}_R$ sia $*$-debolmente denso in Y^*; definiamo

$$\mathcal{D}_{R'} = \{x \in X \,/\, \exists\, y \in Y \text{ tale che } \langle Ry', x\rangle = \langle y', y\rangle, \forall\, y' \in \mathcal{D}_R\}$$

e notiamo che ogni $x \in \mathcal{D}_{R'}$ individua un unico $y \in Y$ perchè $\mathcal{D}_R$ è $*$-debolmente denso in Y^*; quindi possiamo definire

$$R'x = y \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}_{R'} .$$

Analogamente a quanto già visto

$$G_{R'} = (VG_R)^{\perp} = V'G_R^{\perp}$$

ove il simbolo $\perp$ si riferisce alla dualità tra $X^* \oplus Y^*$ e $X \oplus Y$, e quindi $G_{R'}$ è un sottospazio chiuso di $X \oplus Y$, ossia R' è un operatore lineare chiuso.

Notiamo che abbiamo usato lo stesso simbolo (T') per indicare il trasposto di un operatore lineare in due topologie diverse e quindi dovremo specificare in ogni caso quale trasposto prendere in considerazione; comunque, quando non vi sarà alcuna ulterio re indicazione se $T:X \to Y$ allora T' deve intendersi relativo alla dualità X,X^* e Y,Y^* e se $T:Y^* \to X^*$, T' deve intendersi relativo alla dualità di Y^*, Y e di X^*,X. In particolare se $T:X \to Y$

$$T'' = (T')' : X \longrightarrow Y$$

indicherà il bitrasposto di T.

5.28. Teorema. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E

$$T : \mathcal{D}_T \subset X \longrightarrow Y$$

UN OPERATORE LINEARE DA X IN Y CON DOMINIO DENSO.

LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

i) T E' CHIUDIBILE

ii) $\mathcal{D}_{T'}$ E' $*$-DEBOLMENTE DENSO IN Y^*.

INOLTRE SE E' SODDISFATTA LA i) O LA ii)

$$\overline{T} = T''.$$

Dim. Poichè G_T è uno spazio lineare sappiamo (coroll.4.14) che

$$\overline{G_T} = G_T^{\perp\perp} = V(V'G_T^{\perp})^{\perp},$$

quindi, se $\mathcal{D}_{T'}$ è $*$debolmente denso, esiste T'' e

$$\overline{G_T} = VG^{\perp}_{T'} = G_{T''} .$$

ossia T è chiudibile e la sua chiusura e T''.

Rimane da provare che i) implichi ii).

Se T è chiudibile

$$0 \oplus y \in G_T^{\perp\perp} \iff y=0$$

cioè

$$0 \oplus y \perp G_T^{\perp} \iff y=0$$

dunque

$$y \perp \mathcal{D}_{T'} \iff y=0$$

Ma allora $\mathcal{D}_{T'}^{\perp} = \{0\}$ ossia $\mathcal{D}_{T'}$ è $*$-debolmente denso.

$\square$

5.29. <u>Corollario</u>. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH RIFLESSIVI E T UN OPERATORE LINEARE DA X IN Y DENSAMENTE DEFINITO. ALLORA T E' CHIUDIBILE SE E SOLO SE IL DOMINIO DEL TRASPOSTO, T', E' DENSO IN Y .

<u>Dim</u>. Poichè X e Y sono riflessivi le topologie $*$-deboli di X^* e Y^* coincidono rispettivamente con le loro topologie deboli. Essendo $\mathcal{D}_{T'}$ un sottospazio lineare la sua chiusura nella topologia debole coincide con la sua chiusura in norma.

Notiamo che abbiamo usato solo la riflessività di Y.

$\square$

Se consideriamo operatori lineari tra spazi di Hilbert è più naturale definire al posto dell'operatore trasposto l'operatore aggiunto.

5.30. Definizione. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e T un operatore lineare densamente definito da $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$.

Posto

$$\mathcal{D}_{T^*} = \{ j \in \mathcal{H} \ / \ x \in \mathcal{D}_T \longrightarrow (y,Tx) \ \text{è continua} \},$$

per ogni $y \in \mathcal{D}_{T^*}$ sia T^*y l'unico vettore di $\mathcal{H}$, esistente per il lemma di Riesz, tale che

$$(y,Tx) = (T^*y,x), \quad \forall x \in \mathcal{D}_T.$$

L'operatore lineare

$$T^*: \mathcal{D}_{T^*} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad T^*: x \longrightarrow T^*x$$

si chiama l'operatore aggiunto si T.

Notiamo espressamente che mentre $(\lambda T)' = \lambda T'$ risulta $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sappiamo che il duale di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è lo spazio di Hilbert coniugato $\overline{\mathcal{H}}$, ossia esiste un operatore antilineare isometrico J di $\mathcal{H}$ su $\mathcal{H}^*$

$$\| Jx \| = \| x \|, \quad x \in \mathcal{H} \quad \text{e} \quad J(\lambda x+y) = \bar{\lambda} Jx + Jy, \quad x,y \in \mathcal{H}.$$

E' facile accorgersi che

$$A^{*} = J^{-1}A'J, \tag{5.28}$$

da cui segue immediatamente che un operatore lineare densamente definito T da $\mathscr{H}$ in $\mathscr{H}$ è chiudibile se e solo se il suo aggiunto T è densamente definito, e se T e chiudibile $\bar{T}=T^{**}$, cosa peraltro dimostrabile direttamente.

Segue ancora dalla (5.28) e dal lemma 5.28 che, se $\mathscr{H}$ è uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ allora $A^{*} \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ e

$$\| A\| = \| A^{*}\|$$

e ciò si esprime dicendo che $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ è un $*$-algebra di Banach, ossia un'algebra di Banach munita di una involuzione $A \rightarrow A^{*}$ tale che

$$(\lambda A+B)^{*} = \bar{\lambda}A^{*}+B^{*}; \quad (AB)^{*} = B^{*}A^{*}, \qquad \| A\| = \| A^{*}\|$$

per qualunque $\lambda \in \mathbb{C}$ e $A,B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$. Di più $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ è una C^{*}-algebra, ossia vale la seguente ulteriore proprietà.

5.31. <u>Proposizione</u>. SIA $\mathscr{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT. PER OGNI $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ VALE

$$\| A^{*} A\| = \| A\|^{2}.$$

<u>Dim.</u> La diseguaglianza

$$\| A^* A \| \leq \| A \|^2$$

è immediata, dimostriamo quella opposta.

$$\| A \|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax) = \sup_{\|x\|=1} (x, A^* Ax) \leq \| A^* A \|$$

Nell'ultima diseguaglianza si è fatto uso della diseguaglianza di Schwartz.

$\square$

In generale diremo che un'algebra di Banach $\mathfrak{A}$ è una C^*-algebra se è munita di una involuzione $A \in \mathfrak{A} \rightarrow A^* \in \mathfrak{A}$ che è antilineare, soddisfa

$$(AB)^* = B^* A^*, \qquad A, B \in \mathfrak{A},$$

e la norma soffisfa la condizione C^*

$$\| A^* A \| = \| A \|^2, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Segue

$$\| A^* \| = \| A \|, \qquad \forall A \in \mathfrak{A},$$

cioè $\mathfrak{A}$ è una *algebra di Banach: infatti per ogni $A \in \mathfrak{A}$ è

$$\| A \|^2 \leq \| A \| \, \| A^* \|$$

quindi

$$\| A \| \leq \| A^* \| ,$$

scambiando A e A^* segue

$$\| A^* \| \leq \| A^{**} \| = \| A \| ,$$

cioè $\| A \| = \| A^* \|$.

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert e $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una sottoalgebra tale che $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^* \in \mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{A}$ è chiusa in norma, segue che $\mathfrak{A}$ è una C^*-sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

5.32. Proposizione SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT COMPLESSO, E A UN OPERATORE LINEARE DENSAMENTE DEFINITO DA $\mathcal{H}$ IN $\mathcal{H}$.

LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI

i) $A \subset A^*$, OSSIA A^* E' UNA ESTENSIONE DI A.

ii) $(Ax,y) = (x,Ay) \quad \forall \, x,y \in \mathcal{D}_A$.

iii) (Ax,x) E' REALE QUALUNQUE $x \in \mathcal{D}_A$.

Dim. i) è equivalente alla ii) per definizione (questa equivalenza è quindi valida anche nel caso di uno spazio di Hilbert reale). Ovviamente ii) implica iii), d'altra parte se vale ii)

$$(A(x+iy),x+iy) \text{ è reale } \quad \forall \, x,y \in \mathcal{D}_A$$

e poichè

$$(A(x+iy),x+iy)=(Ax,x)+(Ay,y) - i(Ax,y)+i(Ay,x)$$

affinchè siano reali ambi i membri dell'identità deve essere

$$(Ax,y) = \overline{(Ay,x)} = (x,Ay)$$

$\square$

Possiamo ora dare la seguente importante definizione.

5.33. <u>Definizione</u>. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert (complesso) e $A: \mathcal{D}_A \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare densamente definito. Diremo che A è <u>hermitiano</u> se vale una delle tre proposizioni equivalenti della proposizione 5.32.

Il seguenteteorema va sotto il nome di teorema di Hellinger-Toeplitz.

5.34. <u>Teorema</u>. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ UN OPERATORE LINEARE HERMITIANO E OVUNQUE DEFINITO. ALLORA A E' LIMITATO.

<u>Dim.</u> Poichè $\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{H}$, A è chiudibile, quindi chiuso perchè ovunque definito, quindi limitato per il teorema del grafico chiuso.

$\square$

NOTA: Un operatore hermitiano è sempre chiudibile, infatti il suo aggiunto è densamente definito.

Siano ora X e Y due spazi di Banach e $A: \mathcal{D}_A \subset X \to Y$ un operatore chiuso. Allora il nucleo di A è chiuso perchè

$$n(A) = G_A \cap X \oplus 0,$$

ove, come al solito, abbiamo identificato $n(A)$ con $n(A)\oplus 0$. Allora $X/_{n(A)}$ è uno spazio di Banach (teorema 4,33).

Sia

$$q : x \in X \longrightarrow \tilde{x} \in X/_{n(A)}$$

l'applicazione canonica di X su $X/_{n(A)}$.

Definiamo l'operatore lineare

$$\tilde{A} : \mathcal{D}_{\tilde{A}} \subset X/_{n(A)} \longrightarrow Y \quad , \qquad \mathcal{D}_{\tilde{A}} = q(\mathcal{D}_A)$$

ponendo, qualunque $\tilde{x} \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$,

$$\tilde{A}\tilde{x} = Ax \qquad\qquad x \in \mathcal{D}_A \quad , \; q(x)=\tilde{x} .$$

E' di immediata verifica che $\tilde{A}$ è ben definito e

$$n(\tilde{A}) = \{0\} \quad , \qquad R(\tilde{A}) = R(A) .$$

5.35. Proposizione. SE A E' CHIUSO ANCHE $\tilde{A}$ E' CHIUSO. SE $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ ALLORA $\tilde{A} \in \mathcal{B}(X/_{n(A)},Y)$ e

$$\| A \| = \| \tilde{A} \| .$$

IN ENTRAMBI I CASI, SE $R(A)=Y$, ALLORA $\tilde{A}^{-1}$ E' CONTINUO.

Dim. Poichè

$$G_{\tilde{A}} = G_A / {}_{n(A)\oplus 0}$$

se A è chiuso $G_{\tilde{A}}$ è uno spazio di Banach, quindi $\tilde{A}$ è chiuso.

Sia $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Per qualunque $\tilde{x} \in X/_{n(A)}$ e $\varepsilon > 0$ esiste $x \in X$ tale che

$$q(x) = \tilde{x} \qquad e \qquad \| x \| \leq (1+\varepsilon) \| \tilde{x} \|$$

dunque

$$\| \tilde{A}\tilde{x} \| = \| Ax \| \leq \| A \| \, \| x \| \leq (1+\varepsilon) \| A \| \, \| \tilde{x} \| ,$$

quindi A è continuo e

$$\| \tilde{A} \| \leq \| A \| .$$

La diseguaglianza opposta è anche vera perchè

$$\| Ax \| = \| \tilde{A}\tilde{x} \| \leq \| \tilde{A} \| \, \| x \| \leq \| \tilde{A} \| \, \| x \| , \quad \forall \, x \in X .$$

Proviamo l'ultimo punto della proposizione. Se R(A)=Y e A è chiuso (in particolare se $A \in \mathcal{B}(X,Y)$) allora A^{-1} è chiuso al pari di A. Poichè

$$\mathcal{D}_{\tilde{A}^{-1}} = R(\tilde{A}) = R(A) = Y$$

segue dal teorema del grafico chiuso che $\tilde{A}^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X/_{n(A)})$. $\square$

APPLICAZIONE. Sia X uno spazio di Banach <u>separabile</u>. Esiste un sottospazio lineare chiuso di $\ell^1(\mathbb{N})$, M, tale che

$$X \sim \ell^1(\mathbb{N})/_M$$

ove il simbolo "$\sim$" significa topologicamente isomorfi.

<u>Dim.</u> Sia $\{e_1, e_2 \ldots e_n \ldots\}$ una successione di vettori di X densa nella palla unitaria $\{x \in X / \|x\| \leq 1\}$.

Sia

$$A: \{\xi_n\} \in \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \in X .$$

A è un operatore lineare continuo e $\|A\| \leq 1$.

Mostriamo che

$$R(A) = X .$$

E' sufficiente far vedere che R(A) contiene la palla unitaria di X.

Sia allora $x \in X$ e $\|x\| \leq 1$.

Per la densità di $\{e_n\}$ esiste $e_{n_1} \in \{e_n\}$ tale che

$$\| x - e_{n_1} \| < \frac{1}{2}$$

Ripetendo il ragionamento esiste $e_{n_2} \in \{e_n\}$ tale che

$$\left\| x - e_{n_1} - \frac{1}{2} e_{n_2} \right\| < \frac{1}{2^2}$$

e quindi, iterando, esiste una successione e_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} \frac{e_{n_k}}{2^{k-1}} \right\| < \frac{1}{2^N} \tag{5.29}$$

da cui è facile concludere che A è suriettivo.

Posto

$$M = n(A)$$

dalla precedente proposizione segue che

$$\tilde{A} : \ell^1(\mathbb{N})/_M \longrightarrow X$$

è un isomorfismo bicontinuo tra $\ell^1(\mathbb{N})/_M$ e X. $\square$

OSSERVAZIONE

~~ESERCIZIO~~

Modificando il ragionamento si può

~~Ripetendo il ragionamento in (5.29) con 2 sostituito con 3,4...~~

concludere che $\tilde{A}$ è una isometria.

Se X e Y sono spazi di Banach e $A: \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ è un operatore lineare chiuso definiamo il modulo minimo ridotto di A

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \sup \{\lambda \in \mathbb{R} / \|Ax\| \geq \lambda\, d(x, n(A)),\ \forall x \in \mathcal{D}_A\} \\ &= \sup \{\lambda \in \mathbb{R} / \|Ax\| \geq \lambda \|\tilde{x}\|,\ \forall \tilde{x} \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}\} \end{aligned}$$

quindi

$$\gamma(A)^{-1} = \inf \{\lambda \in \mathbb{R} / \|\tilde{A}^{-1} y\| \leq \lambda \|y\|, \forall y \in R(A) \quad = \|\tilde{A}^{-1}\|$$

da cui $\gamma(A) > 0$ se e solo se $\tilde{A}^{-1}$ è limitato.

5.36 <u>Teorema</u>. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E $A: \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE CHIUSO. LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI

i) $R(A)$ E' CHIUSO

ii) $\gamma(A) > 0$

iii) $\tilde{A}^{-1}$ E' CONTINUO

iv) $A: \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow R(A)$ E' UN'APPLICAZIONE APERTA.

<u>Dim.</u> i) $\Longleftrightarrow$ iii) Poichè $\tilde{A}$ è chiuso e invertibile, tale sarà $\tilde{A}^{-1}$. Per il teorema del grafico chiuso $\mathcal{D}_{\tilde{A}^{-1}} = R(A)$ è chiuso se e solo se $\tilde{A}^{-1}$ è continuo.

ii) $\Longleftrightarrow$ iii) Per definizione di $\gamma(A)$.

iii) $\Longleftrightarrow$ iv) L'applicazione canonica $q: X \longrightarrow X/_{n(A)}$ è continua ed aperta (per il teorema dell'applicazione aperta o come si può dimostrare direttamente senza difficoltà) e poichè

$$A : \mathcal{D}_A \xrightarrow{\quad q \quad} \mathcal{D}_{\tilde{A}} \xrightarrow{\quad \tilde{A} \quad} R(A)$$

$A : \mathcal{D}_A \longrightarrow R(A)$ è aperta se e solo se $\tilde{A}: \mathcal{D}_{\tilde{A}} \longrightarrow R(A)$ lo è, ossia se e solo se $\tilde{A}^{-1}$ è continuo.

$\square$

5.37 <u>Corollario</u>. NELLE IPOTESI DEL TEOREMA PRECEDENTE SE

$$\operatorname{codim} R(A) < \infty$$

ALLORA R(A) E' CHIUSO.

<u>Dim.</u> Dimostriamo dapprima che se T è un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach tale che codim $\mathcal{D}_T < \infty$ allora T è continuo. Sia M un complementare algebrico per $\mathcal{D}_T$, allora

$$G_T + M \oplus 0$$

è il grafico di una estensione chiusa (corollario 5.24) di T e ovunque definita, quindi continua per il teorema del grafico chiuso. Dunque anche T è continuo.
Nel nostro caso

$$R(A) = \mathcal{D}_{\tilde{A}^{-1}}$$

e quindi la tesi segue dal precedente teorema.

$\square$

5.38 <u>Definizione</u>. Sia $A: \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ un operatore lineare chiuso tra gli spazi di Banach X e Y. Poniamo

$$\text{def}(A) = \text{codim}R(A) = \text{difetto di } A\,,$$

$$\text{nul}(A) = \dim n(A) = \text{nullità di } A\,.$$

Diremo che A è un operatore di Fredholm se

$$\text{def}(A) < \infty \quad \text{e} \quad \text{nul}(A) < \infty$$

(si osservi che R(A) è chiuso); diremo che A è un operatore di semi-Fredholm se R(A) è chiuso e

$$\mathrm{def}(A) < \infty \quad \text{oppure} \quad \mathrm{nul}(A) < \infty .$$

Nel caso in cui A sia di Fredholm o di semi-Fredholm poniamo

$$\mathrm{ind}(A) = \mathrm{nul}(A) - \mathrm{def}(A) = \text{indice di } A \; .$$

Il seguente teorema è noto come teorema del codominio chiuso.

5.39. Teorema. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E $A : \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE CHIUSO CON DOMINIO $\mathcal{D}_A$ DENSO IN X.

ALLORA

i) $\gamma(A) = \gamma(A')$

ii) SE $\gamma(A) > 0$

$$R(A) = n(A')^{\perp} \qquad \text{E} \qquad R(A') = n(A)^{\perp} \; .$$

Per la dimostrazione di questo teorema occorono alcuni lemmi, diamo però subito alcune osservazioni e un corollario.

NOTA: Nel precedente teorema il punto i) ci dice che sono equivalenti

a) R(A) è chiuso uniformemente

b) R(A') è chiuso uniformemente

ma il punto ii) implica che sono equivalenti

a) $R(A)$ è chiuso uniformemente

b) $R(A')$ è chiuso nella topologia $*$-debole.

NOTA: Se A è un operatore come nel precedente teorema, il nucleo di A' è un sottospazio di Y^* $*$-debolmente chiuso. Infatti $G_{A'}=V'G_A$ è uno spazio $*$-debolmente chiuso di $Y^*\oplus X^*$ e

$$n(A') = G_{A'}\cap Y^*\oplus 0 .$$

5.40. <u>Corollario</u>. SIA $A:D_A\subset X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE DENSAMENTE DEFINITO TRA GLI SPAZI DI BANACH X E Y. SONO EQUIVALENTI:

i) A E' DI FREDHOLM (A E' DI SEMI-FREDHOLM),

ii) A' E' DI FREDHOLM (A' E' DI SEMI-FREDHOLM).

SE VALE i) O ii)

$$\mathrm{ind}(A) = -\mathrm{ind}(A') .$$

<u>Dim.</u> Per il teorema del codominio chiuso $R(A)$ è chiuso se e solo se $R(A')$ è chiuso; la tesi è allora acquisita se mostriamo che, se vale i) o ii), allora

$$\mathrm{def}(A) = \mathrm{nul}(A') \quad \text{e} \quad \mathrm{nul}(A)=\mathrm{def}(A').$$

Osserviamo ora che la dimensione di uno spazio di Banach è uguale alla dimensione del suo duale (identifichiamo tutte le cardinalità infinite), come segue dal fatto che il duale di $\mathbb{C}^n$ è $\mathbb{C}^n$. Per il precedente teorema

$$Y/R(A) = Y/n(A')^{\perp}$$

da cui, per la proposizione 4.35

$$\left(Y/R(A)\right)^{*} = n(A')^{\perp\perp} = n(A'),$$

ove con l'ultimo passaggio è giustificato perchè $n(A')$ è, come abbiamo notato, $*$-debolmente chiuso. Ma allora

$$\mathrm{def}(A) = \dim(Y/R(A)) = \dim(Y/R(A))^{*} = \dim n(A') = \mathrm{nul}(A').$$

Analogamente la relazione

$$X^{*}/R(A') = X^{*}/n(A)^{\perp} = n(A)^{*}$$

implica che

$$\mathrm{nul}(A) = \mathrm{def}\,(A').$$

$\square$

5.41. <u>Lemma</u> SIA $A' \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE DENSAMENTE DEFINITO CHE OPERA TRA GLI SPAZI DI BANACH X E Y.
SUPPONIAMO CHE A SIA CHIUSO E CHE

$$n(A) = \{0\} \quad \text{E} \quad R(A) = Y,$$

OSSIA A E' INVERTIBILE E $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$.

ALLORA

$$R(A') = X^*.$$

Dim. Per la definizione di trasposto un elemento x' di X^* appartiene a $R(A')$ se e solo se esiste y' in Y^* tale che

$$\langle x',x\rangle = \langle y',Ax\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A,$$

ma, per ogni x appartenente a $\mathcal{D}_A$,

$$\langle x',x\rangle = \langle x',A^{-1}Ax\rangle = \langle (A^{-1})'x',Ax\rangle, \quad x' \in X^*$$

poichè $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$ implica che $(A^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*,Y^*)$, quindi ogni $x' \in X^*$ appartiene anche a $R(A')$ e

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

$\square$

Siano X e Y spazi di Banach e $A:\mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ un operatore lineare chiuso con $\mathcal{D}_A$ denso. Possiamo decomporre A nel prodotto operatoriale di tre operatori lineari secondo lo schema

$$A: X \xrightarrow{q} X/_{n(A)} \xrightarrow{B} \overline{R(A)} \xrightarrow{i} Y$$

ove q è l'applicazione quoziente canonica di X su $X/_{n(A)}$, i è l'immersione di $\overline{R(A)}$ in Y e B è univocamente individuato dalla relazione

$$(5.30) \qquad A = i \circ B \circ q \quad , \quad \mathcal{D}_B = q(\mathcal{D}_A).$$

Analogamente al caso dell'operatore $\tilde{A}$, B è un operatore lineare chiuso, inoltre B è iniettivo e ha codominio denso. Chiameremo la (5.30) la fattorizzazione canonica di dell'operatore lineare A. Nel caso in cui trattiamo dell'operatore A', trasposto di A, è più opportuno intendere per fattorizzazione canonica di A' la decomposizione

$$A' : Y^* \xrightarrow{q_1} Y^*/_{n(A')} \xrightarrow{B_1} \overline{R(A')}^{*deb} \xrightarrow{i_1} X$$

ove q_1 è l'applicazione quoziente di Y^* su $Y^*/_{n(A')}$ e i_1 è l'immersione in X della chiusura di R(A') nella topologia $*$-debole. Se X e Y sono spazi di Banach riflessivi non ci sarà comunque ambiguità nel termine "fattorizzazione canonica".

5.42. <u>Lemma</u> SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E $A:X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE CHIUSO E DENSAMENTE DEFINITO. SE LA FATTORIZZAZIONE CANONICA DI A E'

$$A = i \circ B \circ q$$

ALLORA LA FATTORIZZAZIONE CANONICA DI A' E'

$$A' = q' \circ B' \circ i' .$$

Dim. Cominciamo con l'osservare che

(5.31) $$n(A') = R(A)^{\perp} \quad e \quad n(A) = R(A')^{\perp};$$

infatti

$$y' \in n(A') \iff y' \in \mathcal{D}_{A'} \ \& \ A'y' = 0$$
$$\iff \langle y', Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_A$$

poichè $\mathcal{D}_A$ è denso in X, e

$$x \in n(A) \iff x \in \mathcal{D}_A \ \& \ Ax = 0$$
$$\iff x \in \mathcal{D}_A \ \& \langle y', Ax \rangle = 0 \quad \forall y' \in \mathcal{D}_{A'}$$
$$\iff x \in X \ \& \ \langle A'y', x \rangle = 0 \quad \forall y' \in \mathcal{D}_{A'}$$

il penultimo passaggio essendo giustificato perchè $\mathcal{D}_{A'}$ è $*$-debolmente denso in Y^*. Notiamo ancora che dalle (5.31) e dal teorema del bipolare segue che

$$n(A')^{\perp} = \overline{R(A)} \quad e \quad n(A')^{\perp} = \overline{R(A')}^{*\,deb} .$$

Poichè

$$q: X \longrightarrow X/_{n(A)} \quad e \quad i: R(A) \longrightarrow Y$$

per la proposizione 4.35

$$q': (X/_{n(A)})^* = n(A)^{\perp} = \overline{R(A')}^{*\mathrm{deb}} \longrightarrow X^*$$

$$i': Y^* \longrightarrow (\overline{R(A)})^* = Y^*/_{R(A)^{\perp}} = Y^*/_{n(A')}$$

ed una semplice verifica mostra che

$$q' = i_1 \qquad \text{e} \qquad i' = q_1 \, ,$$

quindi

$$A' = q' \circ B_1 \circ i'$$

e la dimostrazione è completa se proviamo che $B_1 = B'$. Verifichiamo allora che

a) $\mathcal{D}_{B_1} = \mathcal{D}_{B'}$, B_1 e B' hanno lo stesso dominio,

b) $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}'$, B_1 è una estensione di B'.

Per dimostrare la a) osserviamo che

$$\mathcal{D}_{B'} = \left\{ \tilde{g} \in Y^*/_{R(A)^{\perp}} \;/\; \tilde{x} \in \mathcal{D}_B \longrightarrow \langle \tilde{g}, B\tilde{x} \rangle \text{ è continua} \right\}$$

$$\mathcal{D}_{B_1} = \left\{ \tilde{g} \in Y^*/_{R(A)^{\perp}} \;/\; g \in \mathcal{D}_{A'} \quad \forall g \in \tilde{g} \right\}$$

e per ogni x nel dominio di A e g elemento di $\tilde{g} \in Y^*/_{R(A)^{\perp}}$, in virtù del diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{x} \arrow[dr] & \\
x \arrow[ur, "q"] \arrow[r] & \langle \tilde{g}, B\tilde{x} \rangle = \langle \tilde{g}, Ax \rangle = \langle g, Ax \rangle &
\end{tikzcd}$$

poichè q è una funzione continua e aperta, la continuità di

$$\tilde{x} \longrightarrow \langle \tilde{g}, B\tilde{x} \rangle$$

è equivalente alla continuità di

$$x \longrightarrow \langle g, Ax \rangle$$

ossia $\mathcal{D}_{B'} = \mathcal{D}_{B_1}$.

Verifichiamo la b): poichè i' è suriettivo è q' è ovunque definito è equivalente dimostrare che

$$(A'=)\ q' \circ B_1 \circ i' \supseteq q' \circ B' \circ i'\ ;$$

se y' appartiene al dominio di $q' \circ B' \circ i'$ allora, per ogni x nel dominio di A,

$$\langle y', Ax \rangle = \langle y', i \circ B \circ q\ x \rangle = \langle i'y', B \circ q\ x \rangle =$$

$$= \langle B' \circ i'y', q\ x \rangle = \langle q' \circ B' \circ i'y', x \rangle$$

ossia

$$y' \in \mathcal{D}_{A'} \qquad \text{e} \qquad A'y' = q' \circ B' \circ i'y'$$

che completa la dimostrazione.

$\square$

5.43. <u>Lemma</u>. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E $A:X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE CHIUSO E DENSAMENTE DEFINITO.

SE

$$n(A) = \{0\} \quad \text{E} \quad R(A) \text{ E' DENSO IN } Y,$$

ALLORA

$$n(A') = \{0\} \quad \text{E} \quad R(A) \text{ E' } *\text{-DEBOLMENTE DENSO IN } X^*$$

E RISULTA

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

<u>Dim.</u> Introduciamo l'isometria

$$U : x \oplus y \in X \oplus Y \longrightarrow y \oplus x \in Y \oplus X$$

e notiamo che

$$U' : y' \oplus x' \in Y^* \oplus X^* \longrightarrow x' \oplus y' \in X^* \oplus Y^*.$$

Ovviamente

$$G_{A^{-1}} = UG_A$$

quindi, se V è l'isometria introdotta nella proposizione 5.28,

$$G_{(A^{-1})'} = V'(UG_A)^{\perp} = V'U'(G_A^{\perp}) = U'V'(G_A^{\perp}) = UG_{A'} = G_{(A')^{-1}}$$

ossia la tesi, avendo usato $UV = -VU$ e $G_A = -G_A$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.39

i) Usiamo gli stessi simboli usati nei precedenti lemmi.

Segue direttamente dalla definizione di modulo minimo ridotto "γ" e dal lemma 5.42 che

$$\gamma(A) = \gamma(B)$$

e

$$\gamma(A') = \gamma(B')$$

quindi possiamo supporre che A sia un operatore iniettivo a codominio denso. In tal caso, applicando la proposizione 5.28 e il lemma 5.43

$$\gamma(A)^{-1} = \| A^{-1} \| = \| (A^{-1})' \| = \| (A')^{-1} \| = \gamma(A')^{-1}.$$

ii) Se $\gamma(A) > 0$ o equivalentemente se $\gamma(A') > 0$ allora $R(A)$ è chiuso, quindi per la (5.31)

$$R(A) = \overline{R(A)} = R(A)^{\perp\perp} = n(A')^{\perp}.$$

Inoltre

$$R(A') = i(R(B')),$$

ma B è un operatore iniettivo e suriettivo e allora per il lemma 5.41 anche B' è suriettivo, ossia

$$R(B') = (X/_{n(A)})^{*} = n(A)^{\perp}$$

da cui

$$R(A') = n(A)^{\perp} .$$

$\square$

Diamo ora una definizione basilare.

5.44. Definizione. Sia X uno spazio di Banach e $A:X \longrightarrow X$ un operatore lineare densamente definito e chiuso.

Chiameremo insieme risolvente di A l'insieme

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / A-\lambda I \text{ è invertibile e } (A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\},$$

chiameremo spettro di A il complementare dell'insieme risolvente

$$\sigma(A) = \complement \rho(A) .$$

Notiamo che, per il teorema del grafico chiuso, dato che $A-\lambda I$ è chiuso se e solo se A è chiuso come conseguenza diretta del criterio (5.19), risulta

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / n(A-\lambda I) = \{0\} \ \& \ R(A-\lambda I) = X\} .$$

Se X è uno spazio a dimensione finita lo spettro di A consiste esattamente degli autovalori di A; ben diverso è il caso in cui X sia a dimensione infinita: se definiamo lo spettro puntuale di A

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, n(A-\lambda I) \neq \{0\}\}$$

ossia l'insieme degli autovalori di A, allora in generale

$$\sigma_p(A) \subsetneq \sigma(A);$$

come esempio si prenda lo spazio $X = C_0(\mathbb{C})$ delle funzioni continue $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ che si annullano all'infinito e si ponga

$$\mathcal{D}_A = \{x(z) \in X \,/\, z\,x(z) \in X\},\quad A: x(z) \in \mathcal{D}_A \longrightarrow zx(z) \in X.$$

E' semplice vedere che

$$\sigma_p(A) = \emptyset \quad \text{ma} \quad \sigma(A) = \mathbb{C}.$$

5.45 . Proposizione. SIA A E X COME NELLA PRECEDENTE DEFINIZIONE. ALLORA

$$P(A) = P(A'),$$

OSSIA A E A' HANNO LO STESSO INSIEME RISOLVENTE E QUINDI LO STESSO SPETTRO.

Dim. Dato che $A-\lambda I$ è chiuso e densamente definito al pari di A, allora

$$R(A-\lambda I) = X \quad \& \quad n(A-\lambda I) = \{0\}$$

è equivalente a

$$n(A'-\lambda I) = \{0\} \quad \& \quad R(A'-\lambda I) = X$$

per il teorema del codominio chiuso.

$\square$

V.3. Operatori compatti: Operatori nucleari, integrali, di Hilbert-Schimdt; teoria di Rietz-Schauder e teorema dell'alternativa di Fredholm.

Siano X e Y spazi vettoriali normati e $A: \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. Diremo che A è un oeratore compatto se l'immagine della palla unitaria di X secondo A è relativamente compatta in Y, ossia se

$$AX_1 = \{Ax \,/\, x \in \mathcal{D}_A, \|x\| \leq 1\}$$

ha chiusura compatta in Y.

Poichè un insieme compatto è un insieme limitato un operatore compatto è continuo.

5.46. Definizione. Chiameremo K(X,Y) la famiglia degli operatori compatti di X in Y ovunque definiti.

Chiaramente K(X,Y) è contenuta in $\mathcal{B}(X,Y)$.

Poniamo inoltre $K(X)=K(X,X)$.

Come primo esempio di operatori in $K(X,Y)$ possiamo considerare gli operatori in $\mathcal{B}(X,Y)$ e a rango finito ossia

$$\{ A \in \mathcal{B}(X,Y) / \dim R(A) < \infty \}.$$

Se A è un tale operatore AX_1 è un insieme limitato, perchè A è continuo, e quindi AX_1 è compatto per il teorema di Bolzano-Weistrass.

Facciamo alcune osservazioni:

a) Se M è un sottospazio lineare di X e $A \in K(X,Y)$ allora

$$A|_M \in K(M, \overline{R(A|_M)}).$$

Ciò è una semplice conseguenza dell'inclusione

$$AM_1 \subset AX_1 .$$

b) Sia Y uno spazio di Banach. Se $A \in K(X,Y)$ e $\overline{X}$ è il completamento di X, detta A l'unica estensione continua di A su $\overline{X}$ risulta

$$\overline{A} \in K(\overline{X},Y),$$

infatti, poichè A è continuo,

$$\overline{A}\overline{X}_1 \subset \overline{\overline{A}X_1} = \overline{AX_1}$$

e quindi $\overline{A}\overline{X}_1$ è relativamente compatto.

c) Supponiamo che $A \in K(X)$ e $n(A) = \{0\}$. Allora A^{-1} è continuo se e solo se X è a dimensione finita. Supponiamo infatti che $A \in K(X)$ è A^{-1} sia continuo; allora A è una applicazione aperta, quindi esiste $\lambda > 0$ tale che

$$AX_1 \supset B_\lambda^X$$

da cui $\overline{B_\lambda^X}$ è compatta, che implica (lemma 4.21)

$$\dim X < \infty ;$$

l'implicazione inversa è ovvia.

d) Sia A un operatore lineare di X in Y. A è compatto se e solo se per qualunque successione

$$x_n \in \mathcal{D}_A , \qquad \sup_n \| x_n \| < \infty$$

esiste una sotto-successione x_{n_k} tale che

$$Ax_{n_k} \text{ è convergente in } Y .$$

Questo utile criterio di compatezza è una diretta conseguenza della definizione di operatore compatto.

5.47. <u>Proposizione</u>. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH. $K(X,Y)$ E' UN SOTTOSPAZIO DI BANACH DI $\mathcal{B}(X,Y)$.

Dim. Dimostriamo innanzitutto che $K(X,Y)$ è uno spazio lineare. Se $A \in K(X,Y)$ ovviamente anche $\lambda A \in K(X,Y)$ per ogni numero complesso λ. Se $A, B \in K(X,Y)$ allora AX_1 e BX_1 sono due sottoinsiemi di Y relativamente compatti, quindi

$$AX_1 \times BX_1 \quad \text{è relativamente compatto in } Y \times Y.$$

Poichè l'addizione

$$(y_1, y_2) \in Y \times Y \longrightarrow y_1 + y_2 \in Y$$

è una funzione continua, segue che

$$AX_1 + BX_1$$

è relativamente compatto, quindi tale sarà anche

$$(A+B)X_1 \subset AX_1 + BX_1$$

ossia $A+B \in K(X,Y)$.

Dimostriamo adesso che $K(X,Y)$ è chiuso in $\mathcal{B}(X,Y)$.

Sia A_n una successione in $K(X,Y)$ tale che

$$A_n \longrightarrow A \in \mathcal{B}(X,Y);$$

vogliamo provare che A è compatto.

Sia x_n, $n \in \mathbb{N}$, una successione di vettori di X_1; poichè A_1 è compatto esiste una sottosuccessione $x_n^{(1)}$ di x_n tale che $A_1 x_n^{(1)}$ è convergente. Reiterando il procedimento possiamo trovare una sottosuccessione $x_n^{(i)}$ di $x_n^{(i-1)}$ tale che $A_i x_n^{(i)}$ è convergente.

La successione diagonale

$$z_i = x_i^{(i)} \qquad i \in \mathbb{N}$$

è una sottosuccessione di x_n tale che

$$A_n z_i \qquad (i=1,2,\dots) \text{ è di Cauchy}$$

per qualunque intero $n > 0$. Ma allora

$$A z_i \qquad (i=1,2,\dots) \text{ è di Cauchy .}$$

Infatti dalla identità

$$A(z_h - z_k) = (A - A_n) z_h + A_n (z_h - z_k) + (A_n - A) z_k$$

risulta

$$\| A(z_h - z_k) \| \leq 2 \| A - A_n \| + \| A_n (z_h - z_k) \| \; ; \tag{5.32}$$

dato $\varepsilon > 0$ sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\| A - A_{n_\varepsilon} \| < \varepsilon$$

e $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\| A_{n_\varepsilon}(z_h - z_k) \| < \varepsilon \quad \text{se} \quad h,k > N,$$

allora, per la (5.32),

$$\| A(z_h - z_k) \| \leq 3\varepsilon \quad \text{se} \quad h,k > N,$$

ossia Az_i è di Cauchy e A è compatto.

□

5.48. Proposizione. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH.
K(X) E' UN IDEALE BILATERO E CHIUSO DELL'ALGEBRA DI BANACH $\mathcal{B}(X)$.

Dim. Per la precedente proposizione non resta da dimostrare che se

$$A \in K(X) \quad \text{e} \quad B \in \mathcal{B}(X)$$

allora

$$AB \in K(X) \quad \text{e} \quad BA \in K(X).$$

Queste relazioni sono comunque evidenti perchè

$$ABX_1 \subset AX_{\|B\|}$$

e

$$(BA)X_1 = B(AX_1)$$

è l'immagine continua di un insieme relativamente compatto.

□

NOTA: Lo stesso argomento della precedente proposizione mostra che se X,Y,Z sono spazi di Banach allora

$$A \in \mathcal{B}(X,Y) \quad e \quad B \in K(Y,Z) \implies BA \in K(X,Z),$$
$$A \in K(X,Y) \quad e \quad B \in \mathcal{B}(Y,Z) \implies BA \in K(X,Z).$$

Diamo ora alcuni esempi di operatori compatti:

1. - Operatori nucleari: Siano X e Y spazi di Banach,
   x'_n, $n \in \mathbb{N}$ una successione in X^* tale che $\sup_n \| x'_n \| = M < \infty$,
   y_n, $n \in \mathbb{N}$ una successione in Y tale che $\sup_n \| y_n \| = N < \infty$,
   λ_n, $n \in \mathbb{N}$ un elemento di $\ell^1(\mathbb{N})$.

Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x'_n, x \rangle y_n , \qquad x \in X,$$

è assolutamente convergente e quindi convergente.

L'operatore

$$A : x \in X \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x'_n, x \rangle y_n \in Y$$

è limite in norma di operatori a rango finito continui, quindi $A \in K(X,Y)$: infatti, posto

$$A_K : x \in X \longrightarrow \sum_{n=1}^{K} \lambda_n \langle x'_n, x \rangle y_n \in Y$$

A_K $(K=1,2,\ldots)$ è una successione di operatori a rango finito con ι ...ne

$$\| (A-A_K)x \| \leq \sum_{h=K+1}^{\infty} |\lambda_h| \, M \, N \| x \|$$

ossia

$$\| A - A_K \| \longrightarrow 0.$$

2. - Operatori integrali su $C([0,1])$: Sia $X=C([0,1])$ e g una funzione appartenente a $C([0,1]\times[0,1])$. L'operatore lineare

$$K_g : x \in X \longrightarrow K_g x \in X \quad , \quad (K_g x)(t) = \int_0^1 g(t,s)x(s)ds$$

è compatto. Infatti, poichè g è uniformemente continua

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \,/\, s,t_1,t_2 \in [0,1], |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |g(t_1,s) - g(t_2,s)| < \varepsilon$$

per cui

$$|K_g x(t_1) - K_g x(t_2)| < \varepsilon \| x \|,$$

quindi in particolare l'insieme $\{ K_g x \,/\, x \in X_1 \}$ è composto di funzioni equicontinue, che sono inoltre equilimitate per la relazione

$$\| K_g x \| \leq \| g \| \, \| x \|.$$

Ma allora, per il teorema di Ascoli Arzelà, l'insieme $K_g X_1$ è relativamente compatto in X.

3. Operatori integrali di Hilbert-Schmidt:

Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, ds)$ ove ds è la misura di Lebesgue sulla retta (più in generale potremmo supporre $\mathcal{H} = L^2(\Omega, d\mu)$ ove $d\mu$ è una misura σ-additiva sull'insieme Ω) e

$$g \in L^2(\mathbb{R}^2, ds^2) \quad \text{quindi} \quad \int |g(t,s)|^2 \, dt \, ds = M^2 < \infty .$$

Poichè $s \longrightarrow g(t,s)$ appartiene a $L^2(\mathbb{R}, ds)$ quasi ovunque, possiamo definire

$$K_g : x \in \mathcal{H} \longrightarrow K_g x \in \mathcal{H} ; \qquad (K_g x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,s) x(s) ds \quad \text{q.o.}$$

Per la diseguaglianza di Schwartz

$$|(K_g x)(t)|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t,s)|^2 \, ds \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)|^2 ds \qquad \text{q.o.}$$

da cui per il teorema di Fubini

$$\| K_g x \|^2 \leq M^2 \| x \|^2 ,$$

ossia

$$K_g \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \text{e} \quad \| K_g \| \leq M .$$

Siano Δ_1 e Δ_2 due insiemi misurabili di misura finita della retta e $\chi_{\Delta_1\times\Delta_2} = \chi_{\Delta_1}\chi_{\Delta_2}$ la funzione caratteristica di $\Delta_1\times\Delta_2$; nel caso particolare in cui $g=\chi_{\Delta_1\times\Delta_2}$ risulta

$$K_g x = \chi_{\Delta_1}(\chi_{\Delta_2}, x)\ , \qquad x \in \mathcal{H},$$

ossia K_g è di rango 1 e quindi compatto.
Poichè ogni funzione in $L^2(\mathbb{R}^2,ds)$ è limite in norma L^2 di funzioni del tipo $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, ove le χ_i sono della forma $\chi_{\Delta_1\times\Delta_2}$, e $\|K_g\| \leq \|g\|_2$, l'operatore K_g è limite in norma di operatori compatti e quindi è compatto essendo $K(\mathcal{H})$ un insieme chiuso.
Come caso particolare del precedente esempio risulta che se $\mathcal{H} = L^2([0,1],ds)$ e g è una funzione continua complessa su $[0,1]\times[0,1]$, allora K_g è compatto. Questo caso particolarmente importante perchè implica che se $A: \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ è un operatore differenziale regolare di ordine n, dotato di inverso $A^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora A^{-1} è compatto. Precisamente sia

$$\mathcal{D}^{(n)} = \{x \in \mathcal{H} \ / \ x^{(n)} \in \mathcal{H}\},$$

$$a_i \in C^\infty([0,1])\ ,\quad i=1,\dots,n\quad ;\quad a_n(s)\neq 0 \ \text{ per } \ s\in[0,1];$$

definiamo

$$A_1 : x \in \mathcal{D}^{(n)} \longrightarrow A_1x \quad , \quad (A_1x)(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i(s)x^{(i)}(s) \ .$$

Se $\mathcal{D}_A$ è un sottospazio di $\mathcal{D}^{(n)}$ caratterizzato da opportune condizioni al contorno e $A = A_1\big|_{\mathcal{D}_A}$, allora vi è un teorema che dice:

$$\text{Se} \quad A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \text{allora} \quad A^{-1} = K_G \ ,$$

ove G è la funzione di Green. Per quanto detto risulta allora A^{-1} compatto. Per la dimostrazione di quanto detto rimandiamo a Dunford-Schwartz Ch.XIII.

Altro caso particolare dell'esempio 3 è il seguente: sia $\Omega = \mathbb{N}$ e $d\mu$ la misura discreta ossia

$$\mu\{n\} = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

In questo caso $L^2(\Omega, \mathbb{N}) = \ell^2(\mathbb{N})$ e gli operatori di Hilbert-Schmidt sono rappresentati da una matrice infinita

$$(a_{ij}) \ , \quad i,j \in \mathbb{N}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{C} \ ,$$

tale che

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \infty$$

ove la matrice opera su $\ell^2(\mathbb{N})$ nel modo seguente:

$$\{x_j\} \in \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \{\sum_j a_{ij}x_j\} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Per quanto detto operatori di questo tipo sono compatti.

Sia ora $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita e $e_1, e_2, \ldots$ una base ortonormale; per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ il numero

$$\{\sum_i (e_i, A^* A e_i)\}^{1/2}$$

definisce la norma di Hilbert-Schmidt $|||A|||$ di A.

Lasciamo per esercizio verificare, usando quanto detto qui sopra, che $|||A|||$ è indipendente dalla base ortonormale e che se $|||A||| < \infty$, A è compatto. Il viceversa è falso, (Dunford-Schwartz, Linear Operators, vol.1).

Il seguente teorema è dovuto a Shauder.

5.49. Teorema: SIANO X E Y SPAZI VETTORIALI NORMATI. DATO UN OPERATORE $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ ALLORA

$$A \in \mathcal{K}(X,Y) \quad \text{se e solo se} \quad A' \in \mathcal{K}(Y^*, X^*).$$

<u>Dim.</u> Supponiamo A compatto, allora $\overline{AX_1}$ è uno spazio topologico metrico compatto e, per il teorema di Ascoli Arzelà, ogni successione di funzioni complesse su $\overline{AX_1}$ che siano equicontinue e equilimitate ammette una sottosuccessione convergente uniformemente. Sia $\{y_1', y_2', \dots\}$, $y_i \in Y_1^*$, una successione nella palla unitaria di Y^*; poichè

$$|\langle y_i', Ax\rangle| \leq \|A\|, \forall x \in X_1, \qquad i \in \mathbb{N},$$

la successione $\{y_i'\}$ è equilimitata su AX_1 e quindi, per continuità, su $\overline{AX_1}$; inoltre se y_1 e y_2 sono due vettori di Y, dato $\varepsilon > 0$,

$$\|y_1 - y_2\| < \varepsilon \Rightarrow |\langle y_i, y_1\rangle - \langle y_i, y_2\rangle| < \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N},$$

ossia le y_i' sono equicontinue su Y e quindi su $\overline{AX_1}$.
Dunque esiste una sottosuccessione $\{y_{i_k}'\}$ tale che

$$\forall x \in X_1, \quad \langle y_{i_k}', Ax\rangle = \langle A' y_{i_k}', x\rangle \to \langle z', Ax\rangle = \langle A' z', x\rangle,$$

ove $z' \in Y^*$ e la convergenza di $A' y_{i_k}'$ è uniforme per x appartenente a X_1, ossia $A' y_{i_k}'$ è convergente in norma e quindi A è compatto.
D'altra parte se $A' \in K(Y^*, X^*)$ allora, per quanto detto, $A'' \in K(X^{**}, Y^{**})$ (il secondo trasposto si riferisce alla dualità Y^*, Y^{**} e X^*, X^{**})

e quindi

$$A = A''|_X \in \mathcal{K}(X,Y),$$

ove abbiamo identificato X con la sua immersione in X^{**}. $\square$

Esponiamo ora la teoria di Riesz-Schauder sugli operatori in $\mathcal{K}(X)$, ove X è uno spazio di Banach. D'ora in avanti, sino al termine di questo capitolo, con X indicheremo sempre uno spazio di Banach.

5.50. Lemma: SIA $A \in \mathcal{K}(X)$ E x_n, $n \in \mathbb{N}$, UNA SUCCESSIONE DI AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI A:

$$Ax_n = \lambda_n x_n \quad , \qquad \lambda_n \in \mathbb{C} \ , \ \ x_n \in X ;$$

ALLORA

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0 .$$

QUINDI L'INSIEME DEGLI AUTOVALORI DI A HA COME UNICO POSSIBILE PUNTO DI ACCUMULAZIONE LO ZERO.

Dim. Sia V_n il sottospazio lineare n-dimensionale generato da $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Per ogni $n > 1$ intero esiste $y_n \in V_n$ tale che: (si veda il lemma 4.21),

$$\|y_n\| = 1 \quad \& \quad d(y_n, V_{n-1}) \geq \frac{1}{2} .$$

Ogni V_n è un sottospazio invariante per A, ossia $AV_n \subseteq V_n$ e pertanto

$$Ay_n - \lambda_n y_n \in V_{n-1}, \qquad n>1,$$

e quindi se m e n sono interi tali che $m>n>1$,

$$\| Ay_n - Ay_m \| \geq d(Ay_n, V_{n-1}) = d(\lambda_n y_n, V_{n-1}) = |\lambda_n| d(y_n, V_{n-1})$$

e, poichè A è un operatore compatto,

$$|\lambda_n| \longrightarrow 0;$$

infatti, se ciò non si verificasse, scelta una sottosuccessione λ_{n_k} di λ_n in modo che $|\lambda_{n_k}| \geq \delta > 0$ per ogni $K \in \mathbb{N}$, la successione Ay_{n_k} non ammetterebbe alcuna sottosuccessione di Cauchy.

$\square$

5.51. Lemma: SIA $A \in K(X)$ E $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. ALLORA

$R(A-\lambda I)$ E' CHIUSO.

Dim. Poichè λ è non nullo e $A \in K(X)$, anche $\lambda^{-1}A \in K(X)$; basta dunque dimostrare il teorema nel caso $\lambda = 1$. Posto

$$T = A - I,$$

per il teorema 5.36 è sufficiente dimostrare che $\tilde{T}^{-1}$ è continuo ossia che

$$z_n \in \mathcal{D}_{\tilde{T}^{-1}} = R(T), \; z_n \longrightarrow 0 \implies \tilde{T}^{-1} z_n = \tilde{x}_n \longrightarrow 0$$

Sostituendo z_n con $(1+\|\tilde{x}_n\|)^{-1} z_n$, possiamo supporre che $\|\tilde{x}_n\| < 1$. Allora esiste $x_n \in X$ tale che $\|x_n\| < 1$ e $q(x_n) = \tilde{x}_n$. Dobbiamo dimostrare che se

$$(A-I)x_n = \tilde{T}\tilde{x}_n = z_n \longrightarrow 0$$

allora

$$q(x_n) = \tilde{x}_n \longrightarrow 0 .$$

Ma, poichè A è compatto, l'insieme $\{Ax_n\}$ è relativamente compatto, e poichè

$$(A - I)\, x_n \longrightarrow 0 \tag{5.33}$$

anche x_n è relativamente compatto. Inoltre la (5.33) implica che se $y \in X$ è un punto limite di $\{x_n\}$ allora

$$(A - I)y = 0 ,$$

ossia $q(y) = 0$, qualunque y punto limite di $\{x_n\}$.

Poichè q è una funzione continua e $\{x_n\}$ è un insieme relativamente compatto, non è difficile accorgersi che i punti limite di $\{\tilde{x}_n\} = q(\{x_n\})$ sono l'immagine secondo q dei punti limite di $\{x_n\}$ e quindi l'unico punto limite di $\{\tilde{x}_n\}$ é $\{0\}$ ossia

$$\tilde{x}_n \longrightarrow 0 .$$

$\square$

A questo punto possiamo enunciare il fondamentale teorema di <u>Riesz-Schauder</u> che generalizza i teoremi di Fredholm sulle equazioni integrali con nucleo L^2 sull'intervallo reale $[a,b]$.

5.52. <u>Teorema</u>: SIA X UNO SPAZIO DI BANACH E A UN OPERATORE LINEARE APPARTENENTE A $\mathcal{K}(X)$. ALLORA:

i) OGNI NUMERO COMPLESSO NON NULLO NELLO SPETTRO DI A E' UN AUTOVALORE DI A, OSSIA

$$\sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\},$$

INOLTRE TALE INSIEME E' CHIUSO IN $\mathbb{C} - \{0\}$ ED E' NUMERABILE.

ii) OGNI AUTOVALORE DIVERSO DA ZERO HA MOLTEPLICITA' FINITA, OSSIA

$$\mathrm{nul}(A - \lambda I) < \infty, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

iii) PER OGNI $\lambda \in \mathbb{C}-\{0\}$ E $y \in X$ L'EQUAZIONE

$$(A - \lambda I)x = y$$

AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE SE E SOLO SE $\lambda \notin \sigma_p(A)$; ALTRIMENTE AMMETTE SOLUZIONE SE E SOLO SE

$$\langle x', y \rangle = 0$$

PER OGNI $x' \in X^*$ CHE SIA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$$A'x' = \lambda x',$$

ED IN TAL CASO AMMETTE $\nu(\lambda)$ SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI CON

$$\nu(\lambda) = \text{nul } (A - \lambda I) < \infty .$$

Osservazioni: Il punto i) vuol dire che $\sigma(A)$ si può ordinare in una successione λ_n tale che

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots\ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0 ;$$

in altre parole $\sigma(A)$ non ha punti di accumulazione eccetto al più 0. Inoltre se $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, allora l'equazione

$$Ax = \lambda x$$

ammette soluzioni non nulle e le soluzioni indipendenti sono in numero finito.

Poichè $\sigma(A') = \sigma(A)$ e A' è compatto al pari di A, l'equazione

$$Ax = \lambda x \qquad \lambda \neq 0$$

ammette soluzioni non nulle se e solo se l'equazione

$$A'x' = \lambda x'$$

ammette soluzioni non nulle e lo spazio lineare delle soluzioni ha dimensione finita n; quindi la condizione per la risolubilità dell'equazione

$$(A - \lambda I)x = y$$

diviene

$$\langle x_1', y\rangle = 0, \dots \langle x_n', y\rangle = 0$$

per $x_1', \dots, x_n'$ soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione

$$A'x' = \lambda x'.$$

Come vedremo, si può dimostrare di più:

$$\mathrm{nul}(A-\lambda I) = \mathrm{nul}\,(A'-\lambda I) \quad \text{se } \lambda \neq 0 \text{ e } A \in \mathcal{K}(X).$$

Ciò significa che per $\lambda \neq 0$, $A-\lambda I$ è un operatore di Fredholm con

$$\mathrm{ind}\,(A-\lambda I) = 0;$$

infatti $R(A-\lambda I)$ è chiuso per il lemma 5.51 e quindi

$$\mathrm{def}(A-\lambda I) = \dim X/_{R(\lambda\cdot X)} = \dim R(A-\lambda I)^{\perp} = \mathrm{nul}(A'-\lambda I).$$

<u>Dimostrazione del Teorema 5.52:</u>

Sia $\lambda \in \mathbb{C}-\{0\}$, $\lambda \notin \sigma_p(A)$: dobbiamo dimostrare che $\lambda \in P(A)$.
Come nel lemma 5.51 possiamo supporre $\lambda = 1$.
Poniamo

$$T = A-I,$$

allora $n(T)=\{0\}$ per ipotesi e $R(T)$ è chiuso per il lemma 5.51: il nostro obiettivo è dimostrare che

$$R(T) = X\,.$$

Sia

$$X_n = R(T^n), \qquad n=1,2,\ldots\,,$$

allora X_n è uno spazio lineare chiuso giacchè

$$\gamma\,(T^n) \geqslant \gamma\,(T)^n > 0,$$

la quale relazione è verificata poichè, essendo $n(T^n) = n(T) = \{0\}$, segue che $\gamma\,(T^n)^{-1} = \| T^{-n} \|$.

Si consideri la successione di sottospazi lineari

$$X \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$$

e si osservi che se la prima inclusione vale in senso stretto allo ra tutte le altre valgono in senso stretto: infatti se esiste un intero n_o tale che $X_{n_o} = X_{n_o+1}$ allora

$$T^{n_o} X = T^{n_o}\,(TX)$$

e quindi per qualunque $x_1 \in X_1$ esiste $x \in X$ tale che $T^{n_o}\,(x - x_1) = 0$ e quindi

$$x_1 = x \in X$$

per la iniettività di T^n, Supponiamo allora

$$X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \ldots \supsetneq X_n \supsetneq \ldots$$

e scegliamo per ogni intero $n > 1$

$$x_n \in X_n, \quad \| x_n \| = 1 , \quad d(x_n, X_{n+1}) > \frac{1}{2} ;$$

allora per $m > n$

$$Ax_n - Ax_m = (I+T)x_n - (I+T)x_m = x_n - z$$

ove z appartiene a X_{n+1}, sicchè

$$\| Ax_n - Ax_m \| > \frac{1}{2} , \qquad m,n \in \mathbb{N}, \quad m > n,$$

che è una contraddizione essendo A compatto; quindi

$$R(T) = X_1 = X.$$

Ora se $\sigma_p(A) - \{0\}$ non fosse numerabile chiuso in $\mathbb{C}-\{0\}$ o se esistesse $\lambda \in \mathbb{C}-\{0\}$ con $\mathrm{nul}(A-\lambda I) = \infty$, potremmo trovare una successione di vettori linearmente indipendenti x_n tale che

$$Ax_n = \lambda_n x_n \quad , \lambda_n \neq 0 , \quad \lambda_n \to \lambda \neq 0,$$

contraddicendo il lemma 5.51. Abbiamo così dimostrato i) e ii). Poichè se $\lambda \neq 0$, $R(A-\lambda I)$ è chiuso, il punto iii) è una immediata conseguenza di i) e della relazione

$$R(A-\lambda I) = n(A'-\lambda I)^{\perp}$$

$\square$

Nota: Un operatore compatto può avere spettro puntuale vuoto, come mostra il seguente esempio in cui lasciamo per esercizio i dettagli delle dimostrazioni.

Operatori di Volterra: Sia $\mathcal{H} = L^2([0,1],dt)$, ove dt è la misura di Lebesgue e sia K(s,t) una funzione a valori complessi continua su $\{(s,t)\in \mathbb{R}^2 / 0\leq t<s\leq 1\}$ e limitata.

Posto

$$(Kx)(s) = \int_0^s K(s,t)x(t)dt \quad , \qquad x\in\mathcal{H},$$

l'operatore lineare

$$K : x\in\mathcal{H} \longrightarrow Kx \in \mathcal{H}$$

appartiene a $K(\mathcal{H})$: infatti K può essere considerato come un operatore di Hilbert-Schmidt in $L^2([0,1], dt)$ il cui nucleo K(s,t) si annulli su $\{(s,t)\in \mathbb{R}^2 / 0\leq s\leq t\leq 1\}$.

Con integrazioni successive otteniamo

$$\| K^n x \| \leq \frac{M^n}{(n-1)!} \|x\| \quad , \qquad n\in\mathbb{N},$$

ove $M = \sup |K(s,t)|$, e quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} K^n$$

è assolutamente convergente in $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ e definisce $(I-K)^{-1}$.
Poichè λK, $\lambda \neq 0$, è un operatore di Volterra al pari di K, segue che l'insieme risolvente di K contiene tutti i numeri complessi diversi da 0. Quindi per un operatore di Volterra K

$$\sigma_p(K) - \{0\} = \sigma(K) - \{0\} = \emptyset .$$

Ora, se K è invertibile, anche 0 non è un autovalore e

$$\sigma_p(K) = \emptyset .$$

Una condizione per la invertibilità di K è la seguente:

$$K(s,t) \in C^1([0,1]\times[0,1]) \ \& \ K(s,s) \neq 0 \text{ per } s \in [0,1].$$

Infatti, in tali ipotesi, se $x \in n(K)$, ossia

$$\int_0^s K(s,t)x(t)dt = 0 ,$$

allora, derivando ambo i membri,

$$\int_0^s K'_s(s,t)\, x(t)dt + K(s,s)\, x(s) = 0$$

ed essendo $K(s,s) \neq 0$

$$\int_0^s \frac{k_s'(s,t)}{k(s,s)}\, x(t)dt + x(s) = 0,$$

ossia $x \in n(I+H)$, ove H è l'operatore di Volterra con nucleo $\frac{k_s'(s,t)}{k(s,s)}$, e quindi, per quanto visto, deve risultare $x=0$.

Concludiamo questo capitolo enunciando una proprietà molto importante degli operatori compatti, che dimostreremo in seguito: se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert, allora ogni operatore appartenente a $K(\mathcal{H})$ è limite in norma di una successione di operatori a rango finito. In generale però tale proprietà non vale per gli spazi di Banach.

VI. STABILITA' E INDICE. OPERATORI HERMITIANI E AUTOAGGIUNTI; PERTURBAZIONI.

VI.1. Operatori di (semi-)Fredholm e proprietà dell'indice: stabilità per perturbazioni relativamente limitate ed invarianza per perturbazioni relativamente compatte. Spettro essenziale di un operatore chiuso.

In questo paragrafo studieremo quando alcune proprietà di operatori lineari, che abbiamo introdotto, si conservano per perturbazioni, ossia con l'aggiunzione di un operatore lineare che sceglieremo "sufficientemente piccolo". Ricordiamo che se X e Y sono spazi normati e A e B due operatori lineari di X in Y con dominio rispettivamente $\mathcal{D}_A$ e $\mathcal{D}_B$ intendiamo con A+B l'operatore lineare

$$\mathcal{D}_{A+B} = \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B, \qquad (A+B)x = Ax+Bx \qquad \forall x \in \mathcal{D}_{A+B} .$$

Inoltre se $C: \mathcal{D}_C \subset Y \longrightarrow Z$, ove Z è un altro spazio normato, intendiamo con CA l'operatore lineare

$$\mathcal{D}_{CA} = A^{-1}(\mathcal{D}_C), \qquad (CA)x = C(Ax) \qquad \forall x \in \mathcal{D}_{CA} .$$

Naturalmente $A+B: X \longrightarrow Y$ e $CA: X \longrightarrow Z$.

CHIUDIBILITA'

Siano X e Y spazi di Banach e $A: \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. Per definizione A è chiuso se G_A è un sottospazio di Banach di $X \oplus Y$. Poichè

$$P\,\big|_{G_A}: x \oplus Ax \; G_A \longrightarrow x \in \mathcal{D}_A$$

stabilisce una biiezione tra G_A e $\mathcal{D}_A$, possiamo anche dire che A è chiuso se $\{\mathcal{D}_A, \tau_{G_A}\}$ è uno spazio di Banach, ossia se il dominio di A munito della topologia del grafico di A, che è indotta dalla norma

$$\| x \| + \| Ax \| \qquad\qquad x \in \mathcal{D}_A$$

od altra equivalente, è uno spazio metrico completo. Quindi l'essere A chiuso è una proprietà della topologia del grafico su $\mathcal{D}_A$: più precisamente è una proprietà della metrica che induce la topologia del grafico su $\mathcal{D}_A$ ma, per il teorema 4.2, una tale proprietà metrica è una proprietà topologica.

Analogamente anche la chiudibilità è una proprietà della topologia del grafico su $\mathcal{D}_A$: infatti sia

$$i : x \in \{\mathcal{D}_A, \tau_{G_A}\} \longrightarrow x \in \{\mathcal{D}_A, \|\cdot\|\},$$

i è un operatore lineare limitato, quindi unicamente estendibile ad un operatore $\bar{i}$

$$\bar{i} : \{\mathcal{D}_A, \tau_{G_A}\}^{\sim} \longrightarrow \{\mathcal{D}_A, \|\cdot\|\}^{-} \equiv \overline{\mathcal{D}_A} \subset X$$

ove "$\sim$" indica il completamento; allora A è chiudibile se e solo se $\bar{i}$ è una applicazione iniettiva.

Infatti ciò non significa altro che $P_X|_{\overline{G}_A}$ è iniettiva e quindi che $\overline{G}_A$ è il grafico di un operatore lineare. Per quanto detto se $B : \mathcal{D}_B \subset X \longrightarrow Y$ è un operatore lineare con $\mathcal{D}_B \supset \mathcal{D}_A$ tale che

$$\tau_{G_A} \equiv \tau_{G_{(A+B)}} \quad \text{su } \mathcal{D}_A$$

allora A è chiudibile se e solo se A+B è chiudibile ed in tal caso

$$\mathcal{D}_{\bar{A}} = \mathcal{D}_{(A+B)^{-}} \quad .$$

6.1. Definizione: Siano X e Y spazi di Banach, A e B operatori lineari di X in Y. Diremo che B è A-limitato se $\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A$ e se esistono due numeri $a,b \geq 0$ tali che

$$\|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \qquad \forall x \in \mathcal{D}_A . \tag{6.1}$$

Notiamo che può essere b=0 nel qual caso B è limitato; d'altra parte è ovvio che ogni $B \in \mathcal{B}(X,Y)$ è A-limitato.

Si osservi che B è A-limitato significa che $\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A$ e

$$B|_{\mathcal{D}_A} : \{\mathcal{D}_A, \tau_{q_A}\} \to Y$$

è un operatore limitato.

L'estremo inferiore dei $b \in \mathbb{R}$ tali che esista $a \in \mathbb{R}$ in modo che sia verificata la (6.1) verrà detto l'A-limite di B.

6.2. Teorema SIANO X E Y SPAZI DI BANACH, A E B OPERATORI LINEARI DI X IN Y. SUPPONIAMO CHE B SIA A-LIMITATO CON A-LIMITE MINORE DI 1. ALLORA

$$A \text{ E' CHIUDIBILE} \iff A+B \text{ E' CHIUDIBILE}$$

ED IN TAL CASO

$$\mathcal{D}_{\bar{A}} = \mathcal{D}_{(A+B)^-} .$$

IN PARTICOLARE A E' CHIUSO SE E SOLO SE A+B E' CHIUSO.

Dim. Per ipotesi esiste $b<1$ tale che

$$\|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A .$$

per un certo $a > 0$. Allora, scelto $k > a$,

$$k\|x\| + \|(A+B)x\| \leq (a+k)\|x\| + (b+1)\|Ax\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A,$$

e

$$k\|x\| + \|(A+B)x\| \geq (k-a)\|x\| + (1-b)\|Ax\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A,$$

ossia le topologie del grafico di A e di A+B coincidono su $\mathcal{D}_A$. $\square$

6.3. Proposizione SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E A: $\mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE A RANGO FINITO. ALLORA A E' CHIUDIBILE SE E SOLO SE A E' CONTINUO.

Dim. Sostituendo X con $\overline{\mathcal{D}_A}$ possiamo supporre A densamente definito. Sia $A_1 : X \longrightarrow R(A)$ l'operatore individuato da

$$i \circ A_1 = A$$

ove i è l'immersione di R(A) in Y. Poichè R(A) è chiuso, A è chiudibile se e solo se A_1 è chiudibile, d'altra parte

$$A_1 \text{ è chiudibile} \iff \mathcal{D}_{A_1'} = R(A)^*$$

perchè R(A) è a dimensione finita; quindi

$$A_1 \text{ è chiudibile} \iff A_1' \text{ è continuo} \iff A_1 \text{ è continuo}$$

ossia la tesi essendo A_1 continuo se e solo se A è continuo.

$\square$

La precedente proposizione ci permette di dare un esempio che mostra che nel teorema 6.2 la stima A-limite<1 è ottimale: sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare chiuso ma non continuo. Esiste una successione $x_n \in \mathcal{D}_A$ tale che

$$x_n \longrightarrow 0 \quad , \qquad \| Ax_n \| \longrightarrow \infty .$$

Allora esiste $y \in \mathcal{H}$ tale che

$$(Ax_n, y) \qquad \text{non converge} ,$$

perchè in caso contrario per il principio dell'uniforme limitatezza la successione Ax_n sarebbe limitata.
Sia P il proiettore ortogonale sul sottospazio unidimensionale generato da y ossia

$$P: x \in \mathcal{H} \longrightarrow (x,y)y \in \mathcal{H} .$$

L'operatore lineare PA non è continuo perchè

$$x_n \longrightarrow 0 \quad \text{ma} \quad PAx_n = (Ax_n, y)y \qquad \text{non converge}$$

e dunque non è chiudibile per la proposizione precedente.

Posto

$$B = (P-I)A$$

è chiaro che B é A limitato con A-limite uguale ad 1, ma per quanto detto

$$A+B = PA$$

è non chiudibile anche se A è chiuso.

INVERTIBILITA'

Nel seguente lemma possiamo supporre, in particolare, che $\mathfrak{A}$ sia uguale a $\mathcal{B}(X)$, ove X è uno spazio di Banach.

6.4. Lemma SIA $\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA' I. SE A E' UN ELEMENTO DI $\mathfrak{A}$ TALE CHE

$$\| A - I \| < 1$$

ALLORA A E' INVERTIBILE OSSIA ESISTE $A^{-1} \in \mathfrak{A}$ TALE CHE

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I .$$

INOLTRE, POSTO $a = \|A-I\|$, RISULTA

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a} \quad ; \quad \|I - A^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a} \tag{6.2}$$

Dim. Poniamo B=I-A. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ è convergente perchè $a<1$ ed è noto che la sua somma è $(1-a)^{-1}$; allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n = C$$

è assolutamente convergente in $\mathfrak{A}$ è quindi convergente, essendo $\mathfrak{A}$ completo, verso un elemento $C \in \mathfrak{A}$.

Segue

$$(I-B)C = \lim_{N\to\infty} (I-B) \sum_{n=0}^{N} B^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} B^n (I-B) =$$

$$= C(I-B) = \lim_{N\to\infty} (I-B^{N+1}) = I,$$

ossia $A^{-1}=C$. Inoltre otteniamo $I-C=-BC$ e quindi essendo

$$\|C\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n = \frac{1}{1-a}$$

seguono le (6.2).

□

Siano X e Y spazi normati e A un operatore lineare di X in Y iniettivo. Allora è ben definito l'operatore lineare di Y in X

$$A^{-1}: Ax \in R(A) \longrightarrow x \in \mathcal{D}_A \;; \quad \mathcal{D}_{A^{-1}}=R(A), \quad R(A^{-1})= \mathcal{D}_A \,,$$

che chiameremo l'inverso di A.

Se $A:X \longrightarrow X$ diremo che A è <u>regolare</u> se $A \in \mathcal{B}(X)$, A^{-1} esiste e $A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

6.5 Proposizione SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E $A: \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE. SUPPONIAMO CHE ESISTA A^{-1} E APPARTENGA A $\mathcal{B}(Y,X)$, OSSIA

$$n(A) = \{0\} \quad , \quad R(A) = Y \quad , \quad A \text{ CHIUSO}.$$

SE $B:X \longrightarrow Y$ E' UN OPERATORE LINEARE A-LIMITATO CON COEFFICIENTI a,b TALI CHE

$$a\,\gamma(A)^{-1} + b < 1$$

ALLORA $(A+B)^{-1}$ ESISTE E APPARTIENE A $\mathcal{B}(Y,X)$. INOLTRE, POSTO $c = a\,\gamma(A)^{-1} + b$, RISULTA

$$\|(A+B)^{-1}\| \leq (1-c)^{-1}\|A^{-1}\| \quad ; \|(A+B)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{c}{1-c} \|A^{-1}\| .$$

<u>Dim</u>. Poichè $A^{-1}A = I_{X}|_{\mathcal{D}_A}$ e $\mathcal{D}_B \supset \mathcal{D}_A$ è

$$A+B = A+B|_{\mathcal{D}_A} = A+BA^{-1}A = (I+BA^{-1})A \quad .$$

Poichè $R(A^{-1}) = \mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B$ l'operatore BA^{-1} è definito su tutto Y e per ogni y in Y

$$\| BA^{-1}y \| \leq a \| A^{-1}y \| + b \| y \| \leq (a\gamma(A)^{-1}+b) \| y \|,$$

cioè $BA^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$ e

$$\| BA^{-1} \| \leq c < 1 \, .$$

Per il lemma precedente, posto $S=I+BA^{-1}$, l'operatore S è regolare in $\mathcal{B}(Y)$ e, per quanto visto,

$$SA = A + B \, .$$

Ma allora

$$R(A+B) = SR(A) = SY = Y$$

e quindi

$$A^{-1}S^{-1}(A+B) = I_X|_{\mathcal{D}_A} \; ; \; (A+B)A^{-1}S^{-1} = I_Y|_{\mathcal{D}_A} \, ,$$

che implica che $(A+B)^{-1}$ esiste e

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}S^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X) \, .$$

Poichè $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1-c}$ risulta

$$\| (A+B)^{-1} \| = \| A^{-1}S^{-1} \| \leq \| A^{-1} \| \| S^{-1} \| \leq \gamma(A)^{-1}(1-c)^{-1}$$

$$\|(A+B)^{-1}-A^{-1}\| = \|A^{-1}(S^{-1}-I)\| \leq \gamma(A)^{-1} \frac{c}{1-c}$$

che completa la dimostrazione. $\square$

Notiamo che la precedente proposizione significa che se 0 non appartiene a $\sigma(A)$ allora 0 non appartiene a $\sigma(A+B)$ (A e B come sopra). Questo fatto ha varie conseguenze, che esamineremo; in particolare segue la semicontinuità superiore dello spettro.

STABILITA' DELL'INDICE DI OPERATORI DI FREDHOLM

Siano X e Y spazi di Banach e $A \in \mathcal{C}(X,Y)$, ossia A è un operatore lineare chiuso di X in Y; sia B un operatore lineare di X in Y A-limitato. Consideriamo l'operatore lineare

$$A + \lambda B, \qquad \lambda \in \mathbb{C};$$

abbiamo visto che per $|\lambda|$ sufficientemente piccolo $A + \lambda B$ è chiuso: possiamo rienunciare ciò dicendo che la chiudibilità è stabile per piccole perturbazioni relativamente limitate. Ora supponiamo che A sia di semi-Fredholm: ci domandiamo se anche questa proprietà è stabile per piccole perturbazioni relativamente limitate. La risposta a questo interrogativo è contenuta nel seguente teorema di cui postponiamo la dimostrazione nel caso di spazi di

Hilbert.

6.6. Teorema SIANO X E Y SPAZI DI BANACH A UN OPERATORE LINEARE DI SEMI-FEDHOLM DI X IN Y E B UN OPERATORE LINEARE DI X IN Y CHE SIA A-LIMITATO. ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE PER $|\lambda| < \delta$

1. $A+\lambda B$ E' SEMI-FREDHOLM
2. $\mathrm{ind}(A+\lambda B) = \mathrm{ind}(A)$
3. $\mathrm{def}(A+\lambda B) \leq \mathrm{def}(A)$ E $\mathrm{nul}(A+\lambda B) \leq \mathrm{nul}(A)$
4. $\mathrm{def}(A+\lambda B)$ E $\mathrm{nul}(A+\lambda B)$ SONO COSTANTI PER $0 < |\lambda| < \delta$.

NOTA: L'enunciato precedente è ottimale nel senso che il difetto e la nullità non possono essere stabili in generale: sia infatti $X=Y=\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathrm{nul}(A+\lambda B) = \mathrm{def}(A+\lambda B) = 0 \qquad \text{se} \quad \lambda \neq 0$$

$$\mathrm{nul}(A) = \mathrm{def}(A) = 1 .$$

Non produrremo la migliore stima di δ nel teorema 6.6 per cui rimandiamo a T.Kato - Perturbation Theory for Linear Operators - cap. IV teorema 5.31; inoltre la nostra dimostrazione vale per operatori di Fredholm o per perturbazioni più restrittive; comunque la nostra dimostrazione ci fornisce la stessa stima di Kato nel caso in cui X e Y siano spazi di Hilbert. La dimostrazione dei punti 1,2,3 è contenuta nel seguente teorema 6.10 mentre il punto 4 è dimostrato separatamente nel teorema 6.12.

6.7 Definizione. Siano X e Y spazi di Banach e A un operatore lineare chiuso di X in Y tale che R(A) sia chiuso.
Poniamo

$$p(A)=\inf\left\{\|P\| \,/\, P\in \mathcal{B}(Y),\ P^2=P,\ R(P)=R(A)\right\},$$
$$q(A)=\inf\left\{\|I-Q\| \,/\, Q\in \mathcal{B}(X),\ Q^2=Q,\ R(Q)=n(A)\right\}.$$

Notiamo che se A è un operatore di Fredholm, allora p(A) e q(A) sono entrambi finiti, infatti per la proposizione 5.25

$$p(A)\leqslant \operatorname{def}(A) \quad , \quad q(A)\leqslant 1+\operatorname{nul}(A) \quad ;$$

nel caso in cui X e Y siano spazi di Hilbert allora p(A) e q(A) sono entrambi uguali ad 1 eccetto nel caso banale in cui $R(A)=\{0\}$.

Cominciamo a dimostrare un teorema di stabilità per operatori iniettivi.

6.8. Teorema. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E $A \in \mathcal{C}(X,Y)$ UN OPERATORE LINEARE CHIUSO CON $n(A)=\{0\}$ e $R(A)$ CHIUSO. SIA B UN OPERATORE LINEARE DI X IN Y A-LIMITATO CON COEFFICIENTI a,b: SE

$$p(A)\left(\frac{a}{\gamma(A)}+b\right)<1$$

ALLORA

1. $A+B$ APPARTIENE A $\mathcal{C}(X,Y)$ CON $n(A+B)=\{0\}$ e $R(A+B)$ E' CHIUSO.
2. $\mathrm{def}(A+B)=\mathrm{def}(A)$.

Dim. Sia $P=P^2\in\mathcal{B}(Y)$, $R(P)=R(A)$, tale che

$$\|P\|\left(\frac{a}{\gamma(A)}+b\right)=c<1\ .$$

Allora $A=PA$ e, essendo $\mathcal{D}_B\supset\mathcal{D}_A$,

$$A+B = A+BA^{-1}A = (I+BA^{-1}P)A$$

ed è chiaro dal diagramma

$$BA^{-1}P:Y\xrightarrow{P}R(P)=R(A)=\mathcal{D}_{A^{-1}}\xrightarrow{A^{-1}}R(A^{-1})=\mathcal{D}_A\subset\mathcal{D}_B\xrightarrow{B}Y$$

che l'operatore lineare $BA^{-1}P$ è ovunque definito in Y e

$$\|BA^{-1}Py\|\leq a\|A^{-1}Py\|+b\|Py\|\leq\left(\frac{a}{\gamma(A)}+b\right)\|Py\|\leq$$

$$\leq\|P\|\left(\frac{a}{\gamma(A)}+b\right)\|y\|=c\|y\|,$$

ossia $BA^{-1}P \in \mathcal{B}(Y)$ e $\| BA^{-1}P \| \leq c < 1$. Per il lemma 6.4 l'operatore $S = I + BA^{-1}P$ è regolare; dalla relazione

$$A+B = SA$$

segue

$$n(A+B) = n(SA) = n(A) = \{0\}$$

$$R(A+B) = R(SA) = SR(A)$$

e poichè $R(A)$ è chiuso e S^{-1} è continuo anche $R(A+B)$ è chiuso. Sia M un sottospazio lineare di Y complementare algebrico di $R(A)$ ossia

$$Y = R(A) \oplus M \quad ,$$

allora $\mathrm{def}(A) = \dim M$; poichè S è un isomorfismo di Y su Y

$$Y = SY = SR(A) \oplus SM = R(A+B) \oplus SM$$

per cui

$$\mathrm{def}(A+B) = \dim SM = \dim M = \mathrm{def}(A) \; . \qquad \square$$

Consideriamo due spazi di Banach X e Y e un operatore lineare <u>chiuso</u> $A : \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$; poichè A è chiuso $\{\mathcal{D}_A , \tau_{q_A}\}$ è uno spazio di Banach e se guardiamo ad A come operatore da $\{\mathcal{D}_A , \tau_{q_A}\}$ in Y allora A

limitato. Se inoltre B è un operatore
è un operatore A-limitato allora $B|_{\mathcal{D}_A}$ come operatore di $\{\mathcal{D}_A, \tau_{G_A}\} \to Y$ è un operatore limitato e la norma di B è "piccola" se e solo se B è A-limitato con coefficienti "piccoli". Poichè ovviamente la nullità è il difetto non dipendono dalla topologia del dominio, segue che possiamo dimostrare i teoremi di stabilità limitatamente al caso in cui A e B appartengono a $\mathcal{B}(X,Y)$.

6.9. <u>Corollario</u>. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH, A UN OPERATORE LINEARE DI FREDHOLM <u>SURGETTIVO</u> DI X IN Y E B UN OPERATORE LINEARE A-LIMITATO DI X IN Y. ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE SE $|\lambda| < \delta$

$$A + \lambda B \text{ E' CHIUSO SURGETTIVO},$$
$$\mathrm{nul}(A + \lambda B) = \mathrm{nul}(A).$$

<u>Dim.</u> Come abbiamo detto possiamo supporre $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$. Allora $A', B' \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$, $n(A') = \{0\}$ e $R(A')$ è chiuso.
Applicando il teorema precedente (si noti che $p(A') < \infty$ essendo $\mathrm{def}(A') = \mathrm{nul}(A') < \infty$) e passando al pre-trasposto ottenuamo la tesi.

6.10. <u>Teorema</u>. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH, $A : \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE DI SEMI-FRADHOLM E B UN OPERATORE LINEARE DI X IN Y A-<u>LIMITATO</u>:

$$\mathcal{D}_B \supset \mathcal{D}_A, \ \|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A.$$

SE

$$p(A)\left(\frac{a}{\gamma(A)}q(A)+b\right)<1$$

ALLORA A+B E' DI SEMI-FREDHOLM E

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} \mathrm{def}(A+B) \leq \mathrm{def}(A) \\ \mathrm{nul}(A+B) \leq \mathrm{nul}(A) \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \qquad \mathrm{ind}(A+B)=\mathrm{ind}(A) \ .$$

Dim.[*] La dimostrazione consiste nel verificare che esiste un operatore lineare T di rango finito

$$\mathrm{ran}(T) = \dim R(T) < \infty$$

tale che

$$\mathrm{def}(A+B) + \mathrm{ran}(T) = \mathrm{def}(A)$$

$$\mathrm{nul}(A+B) + \mathrm{ran}(T) = \mathrm{nul}(A)$$

da cui (i) e (ii) seguono.

Poichè per ipotesi $p(A)<\infty$, $q(A)<\infty$, esistono operatori di proiezione $Q\in \mathcal{B}(X)$, $P\in \mathcal{B}(Y)$ tali che

$$QX = n(A) \quad , \quad PY = R(A),$$

(*) Poichè valga l'enunciato in realtà basta $\frac{a}{\gamma(A)}+b<1$. Vedi T.Kato,cit.

inoltre per l'ipotesi su a,b, posto

$$q = \| I-Q \| \quad ; \quad p = \| P \|$$

possiamo scegliere Q,P sí che valga anche

$$p \left(\frac{a}{\gamma(A)} q+b \right) < 1.$$

Sia

$$M = (I-Q)X \cap \mathcal{D}_A \,;$$

se $x \in \mathcal{D}_A$ allora $Qx \in n(A) \subset \mathcal{D}_A$ quindi $(I-Q)x \in \mathcal{D}_A$ da cui segue

$$M = (I-Q)\mathcal{D}_A \,;$$

la <u>restrizione</u> $A|_M$ di A ad M è un operatore lineare iniettivo <u>e</u> <u>chiuso</u> perchè

$$G_{A|_M} = G_A \cap (I-Q)X \oplus Y$$

è intersezione di chiusi. Inoltre

a) $R(A|_M) = R(A)$,

b) B e $A|_M$-limitato con coefficienti a,b ,

c) $\gamma(A|_M) \geq \frac{\gamma(A)}{q}$;

occorre solo dimostrare c): per ogni $x \in (I-Q)X \cap \mathcal{D}_A$, se $x \neq 0$, posto

$x_1 = \frac{x}{\|x\|}$ è

$$\|Ax\| \geq \gamma(A) d(x, n(A)) = \gamma(A) \|x\| d(x_1, n(A)) \geq$$

$$\geq \gamma(A) \|x\| d(S_1^M, n(A)) = \frac{\gamma(A)}{q} \|x\| ,$$

che implica c).

Allora possiamo applicare il metodo del teorema 6.8 a $A|_M + B$:

$$A|_M + B = (A+B)|_M = (I + B(A|_M)^{-1} P) A|_M ;$$

poichè

$$p\left(\frac{a}{\gamma(A|_M)} + b\right) \leq p\left(\frac{a}{\gamma(A)} q + b\right) < 1,$$

abbiamo che $B(A|_M)^{-1} P$ ha norma minore di 1, quindi

$$S = I + B (A|_M)^{-1} P$$

è un operatore regolare, cioè $S, S^{-1} \in \mathcal{B}(Y)$.

Poichè

$$(6.3) \qquad (A+B)|_M = SA|_M ,$$

segue facilmente che $\mathrm{def}(A+B) \leq \mathrm{def}(A)$ e $\mathrm{nul}(A+B) \leq \mathrm{nul}(A)$ e che $R(A+B)$ è chiuso, ossia A è di semi-Fredholm: infatti se $\mathrm{def}(A) < \infty$ allora $\mathrm{def}(A+B) \leq \mathrm{def}(A)$ e $R(A+B)$ è automaticamente chiuso avendo codimensione finita, se invece $nul(A)<\infty$ allora, poichè

$$R(A+B) = R(A+B)|_M) + Bn(A) \quad ,$$

$R(A+B)|_M)$ è chiuso per la (6.3) e $Bn(A)$ è di dimensione finita al pari di $n(A)$, segue che anche in questo caso $R(A+B)$ è chiuso.

Ci resta da dimostrare che $ind(A+B)=ind(A)$. Poniamo

$$A_1 = S^{-1}(A+B)$$

allora

$$n(A_1) = n(A+B) \quad ; \quad R(A_1) = S^{-1}R(A+B) \, ,$$

quindi

$$nul(A_1) = nul(A+B) \quad ; \quad def(A_1) = def(A+B) \, ,$$

inoltre

$$A_1|_M = A|_M \quad ; \quad \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A_1} = M+n(A) \, .$$

Definiamo

$$T: x+M \in \mathcal{D}_A/_M \longrightarrow A_1x + R(A) \in Y/_{R(A)} \; ;$$

l'operatore T è ben definito perchè

$$x,x' \in \mathcal{D}_A, \; x-x' \in M \implies A_1x - A_1x' = A(x-x') \in R(A) \, .$$

Osserviamo che, se $\xi \in \mathcal{D}_A/_M$,

$$T\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = x + M \quad \text{con} \quad x \in n(A_1);$$

infatti l'implicazione "$\Leftarrow$" è ovvia e inoltre se $\xi = x' + M$

$$T\xi = A_1 x' + R(A) = 0 \Rightarrow \exists\ x_o \in \xi \ / \ A_1 x' = A x_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1(x' - x_o) = 0 \Rightarrow \exists\ x \in n(A_1) / \quad x' = x + x_o \quad ,$$

quindi

$$n(T) = n(A_1)/_M \sim n(A_1)$$

ove il segno "$\sim$" indica l'isomorfismo tra $n(A_1)/_M$ e $n(A_1)$ che esiste essendo $n(A_1)$ e M sottospazi linearmente indipendenti; allora

$$\mathrm{nul}(T) = \mathrm{nul}(A_1) = \mathrm{nul}(A+B)$$

e inoltre

$$\mathrm{nul}(T) + \mathrm{ran}(T) = \dim \mathcal{D}_A/_M = \mathrm{nul}(A)$$

$$\mathrm{def}(T) + \mathrm{ran}(T) = \dim(Y/_{R(A)}) = \mathrm{def}(A) \ .$$

Ma

$$\mathrm{def}(T) = \dim Y/_{R(A)} \Big/ R(A_1)/_{R(A)} = \dim Y/_{R(A_1)} = \mathrm{def}(A_1)$$

$$= \mathrm{def}(A+B)$$

quindi

$$\mathrm{nul}(A+B) + \mathrm{ran}(T) = \mathrm{nul}(A)$$

$$\mathrm{def}(A+B) + \mathrm{ran}(T) = \mathrm{def}(A)$$

che completa la dimostrazione. □

6.11. <u>Corollario</u>. SIANO $\mathcal{H}_1$ E $\mathcal{H}_2$ SPAZI DI HILBERT, A UN OPERATORE LINEARE DI SEMI-FREDHOLM DI $\mathcal{H}_1$ IN $\mathcal{H}_2$, B UN OPERATORE LINEARE DI $\mathcal{H}_1$ IN $\mathcal{H}_2$ A-LIMITATO CON COEFFICIENTI a,b. POSTO

$$c = \frac{a}{\gamma(A)} + b$$

SE $|\lambda| < c^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ALLORA $A+\lambda B$ E' UN OPERTATORE DI SEMI-FREDHOLM E

$$\mathrm{ind}(A+\lambda B) = \mathrm{ind}(A) \quad , \quad \mathrm{nul}(A+\lambda B) \leq \mathrm{nul}(A) \quad , \quad \mathrm{def}(A+\lambda B) \leq \mathrm{def}(A).$$

□

6.12. <u>Teorema</u>. SIA A UN OPERATORE LINEARE DI SEMI-FREDHOLM DELLO SPAZIO DI BANACH X NELLO SPAZIO DI BANACH Y E B UN OPERATORE LINEARE A-LIMITATO DI X IN Y. ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE

$$\mathrm{nul}(A+\lambda B) = \text{costante},$$

$$\mathrm{def}(A+\lambda B) = \text{costante},$$

PER $0 < |\lambda| < \delta$.

Dim. Possiamo supporre A limitato. Passando al trasposto, se occorre, basta supporre $\mathrm{nul}(A)<\infty$. La dimostrazione consiste nel costruire un sottospazio chiuso $X_1 \subset X$ tale che

1. Se $\lambda \neq 0$, $\mathrm{nul}(A+\lambda B)=\mathrm{nul}(A|_{X_1}+\lambda B|_{X_1})$;
2. $AX_1=Y_1$ è chiuso e $BX_1 \subset Y_1$.

Infatti posto

$$A_1 = A|_{X_1} : X_1 \longrightarrow Y_1$$

$$B_1 = B|_{X_1} : X_1 \longrightarrow Y_1$$

A_1 è un operatore di semi-Fredholm surgettivo limitato, B_1 è limitato e, per la proposizione 6.5, $\mathrm{nul}(A_1+\lambda B_1)=\mathrm{nul}(A_1)$ per λ abbastanza piccolo; dunque il teorema segue da 1. e dal teorema 6.10.

Definiamo per induzione i seguenti sottospazi

$$R_1 = R(A) \quad ; \quad D_1 = B^{-1}\{R(A)\}$$

$$R_n = AD_{n-1} \quad ; \quad D_n = B^{-1}\{R_n\}$$

e mostriamo che gli spazi lineari

$$X_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

$$Y_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$$

sono quelli cercati.

La 1. segue dalla inclusione $n(A+\lambda B)\subset X_1$: se $x\in n(A+\lambda B)$, ossia $Ax=-\lambda Bx$, allora $x\in B^{-1}\{A(\complement x)\}\subset D_1$, quindi $Ax=-\lambda Bx\in R_2$ e $x\in D_2$, per cui, iterando il ragionamento, $x\in X_1$.

E' immediato verificare che $BX_1\subset Y_1$ e $AX_1\subset Y_1$; mostriamo che $AX_1=Y_1$: se $y\in Y_1$ allora $y\in R_{n+1}$ per ogni intero n per cui esiste $x_n\in D_n$ tale che $Ax_n=y$; per $m>n$

$$x_m-x_n\in n(A)\cap D_n \quad ;$$

poichè $\mathrm{nul}(A)<\infty$ esiste un intero n_o tale che

$$n(A)\cap D_n = n(A)\cap X_1 \qquad \text{per} \quad n>n_o \;;$$

quindi $x_{n_o}=x_m+(x_{n_o}-x_m)$ appartiene a D_m per $m>n_o$, il che implica $x_{n_o}\in X_1$.

Non resta da dimostrare che X_1 e Y_1 sono sottospazi chiusi di X e Y: se sappiamo che A manda sottospazi lineari chiusi di X in sottospazi lineari chiusi di Y allora, per induzione, i sottospazi D_n e R_n risultano chiusi, essendo B continuo; segue che X_1 e Y_1 sono chiusi come intersezione di insiemi chiusi; la dimostrazione è completata allora dal seguente lemma.

□

6.13 Lemma. SIA A UN OPERATORE LINEARE APPARTENENTE $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, X,Y SPAZI DI BANACH, TALE CHE

$$\mathrm{nul}(A) < \infty \ , \qquad R(A) \text{ E' CHIUSO} .$$

ALLORA A MANDA SOTTOSPAZI LINEARI CHIUSI DI X IN SOTTOSPAZI LINEA RI CHIUSI DI Y.

Dim. Sia $q: X \to X/_{n(A)}$ l'applicazione quoziente canonica e $\tilde{A}: X/_{n(A)} \to R(A)$ l'operatore lineare individuato dalla relazione $A = \tilde{A} \circ q$. Poichè $R(A)$ è chiuso $\tilde{A}$ è un omeomorfismo di $X/_{n(A)}$ su $R(A)$; allora è sufficiente dimostrare che q manda sottospazi lineari chiusi M in sottospazi lineari chiusi $q(M)$: ciò è certo vero se $M \supset n(A)$ perchè un quoziente di spazi di Banach è completo; d'altra parte possiamo sempre ricondurci a questo caso perchè, essendo $\mathrm{nul}(A) < \infty$, $M + n(A)$ è un sottospazio chiuso di X se M lo è, inoltre $q(M+n(A)) = q(M)$. $\square$

Come corollario dei teoremi 6.10 e 6.12 otteniamo:

6.14 Corollario. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ UN OPERATORE LINEARE CHIUSO; SIA

$$\mathcal{F}'(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, (A-\lambda I) \text{ E' DI SEMI-FREDHOLM}\}$$
$$\mathcal{F}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, (A-\lambda I) \text{ E' DI FREDHOLM}\}$$
$$\Delta(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, (A-\lambda I) \text{ E' INIETTIVO E } \gamma(A-\lambda I) > 0\} .$$

ALLORA QUESTI INSIEMI SONO APERTI; ind$(A-\lambda I)$ E' COSTANTE NELLE COMPONENTI CONNESSE DI CIASCUN INSIEME; def$(A-\lambda I)$ E' COSTANTE NELLE COMPONENTI CONNESSE DI $\Delta(A)$; nul$(A-\lambda I)$ E def$(A-\lambda I)$ SONO COSTANTI NELLE COMPONENTI CONNESSE DI CIASCUN INSIEME ECCETTO CHE IN UN INSIEME DISCRETO, CIOE' COSTITUITO DA PUNTI ISOLATI.

Dim. Se $\lambda \in \mathcal{F}'(A)$ (risp. $\mathcal{F}(A)$, $\Delta(A)$) allora l'intorno di λ

$$\{\lambda' \in \mathbb{C} / |\lambda' - \lambda| < \gamma(A-\lambda I)\}$$

appartiene a $\mathcal{F}'(A)$ (rdsp. $\mathcal{F}(A)$, $\Delta(A)$) per il teorema 6.10, che dimostra la prima asserzione.
Poichè ind$(A-\lambda I)$ è una funzione continua di λ a valori interi, segue che ind$(A-\lambda I)$ è costante nella componenti connesse di $\mathcal{F}'(A)$ (risp. $\mathcal{F}(A)$, $\Delta(A)$).
Poichè nul$(A-\lambda I)=0$ per $\lambda \in \Delta(A)$, def$(A-\lambda I)$ è costante nelle componenti connesse di $\Delta(A)$. Infine il teorema 6.12 mostra che un punto di discontinuità per nul$(A-\lambda I)$ o def$(A-\lambda I)$ deve necessariamente essere isolato. $\square$

PERTURBAZIONI RELATIVAMENTE COMPATTE

Abbiamo visto come certe proprietà di operatori lineari siano stabili per "piccole" perturbazioni relativamente limitate; vedremo ora un'altra interessante classe di perturbazioni che conservano alcune proprietà, come ad esempio l'indice, senza restruzioni sul la "piccolezza" della perturbazione.

6.14; <u>Definizione</u>. Siano X e Y spazi di Banach A e B operatori lineari di X in Y. Diremo che <u>B è A-compatto</u> se

1. $\mathcal{D}_B \supset \mathcal{D}_A$,
2. $B : \{\mathcal{D}_A, \tau_{q_A}\} \longrightarrow Y$ è compatto,

ossia se B è definito su $\mathcal{D}_A$ e, quando venga considerato come operatore lineare dello spazio normato $\{\mathcal{D}_A, \tau_{q_A}\}$ in Y, B è compatto.

NOTA: Se B è A-compatto B è anche A-limitato per cui $\tau_{q(A+B)} < \tau_{q_A}$ sul dominio di A; di più vale la seguente.

6.15. <u>Proposizione</u>. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH A UN OPERATORE LINEARE <u>CHIUDIBILE</u> DI X IN Y E $B:X \longrightarrow Y$ UN OPERATORE LINEARE A-COMPATTO. ALLORA LA TOPOLOGIA DEL GRAFICO DI A COINCIDE CON LA TOPOLOGIA DEL GRAFICO DI A+B SUL DOMINIO DI A.

<u>Dim.</u> Per quanto osservato basta dimostrare l'inclusione $\tau_{q_A} < \tau_{q(A+B)}$, cioè che l'insieme

$$\{ x \in \mathcal{D}_A \,/\, \|x\| + \|(A+B)x\| < 1 \}$$

è contenuto in una palla dello spazio normato $\{\mathcal{D}_A, \tau_{q_A}\}$ -

Supponiamo che ciò non sia vero: esiste allora una successione $x_n \in \mathcal{D}_A$, $n=1,2,\ldots$, tale che

$$\| x_n \| + \| (A+B)x_n \| < 1 \tag{6.4}$$

e

$$\alpha_n \equiv \| Ax_n \| \longrightarrow \infty \, .$$

La successione $y_n = \frac{1}{\alpha_n} x_n$ converge a 0 nella topologia del grafico di A+B per la (6.4) ed è limitatá in $\{\mathcal{D}_A, \tau_{q_A}\}$ perchè $\| Ay_n \| = 1$; poichè B è A-compatto esiste una sottosuccessione z_n di y_n tale che

$$Bz_n \longrightarrow w \in Y$$

da cui

$$Az_n \longrightarrow -w \, .$$

perchè z_n tende a 0 nella topologia del grafico di A+B; ma allora

$$z_n \longrightarrow 0 \, , \quad Az_n \longrightarrow -w \, , \quad \| w \| = \| Az_n \| = 1$$

contraddicendo la chiudibilità di A. □

Diamo ora una utile caratterizzazione degli operatori lineari chiusi di semi-Fredholm con nullità finita

6.16. <u>Lemma.</u> SIANO X E Y SPAZI DI BANACH E A: $X \to Y$ UN OPERATORE LINEARE CHIUSO; LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

(i) $\mathrm{nul}(A) < \infty$, $\gamma(A) > 0$,

(ii) PER QUALUNQUE SUCCESSIONE $x_n \in \mathcal{D}_A$, $\|x_n\| = 1$, TALE CHE $Ax_n \to 0$ ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii): sia $\tilde{A}$, come al solito, l'operatore di $X/_{n(A)}$ in $R(A)$ individuato da A; allora A^{-1} è limitato per cui

$$\tilde{x}_n = \tilde{A}^{-1} A x_n \longrightarrow 0 \quad ;$$

scelta una successione limitata $x_n' \in n(A)$ tale $x_n' - x_n \longrightarrow 0$, esiste, essendo finita la dimensione di $n(A)$, una sottosuccessione x_{n_k}' convergente, dunque anche x_{n_k} è convergente.

(ii) $\Rightarrow$ (i) è equivalente a non (i) $\Rightarrow$ non(ii); dimostriamo allora a): $\mathrm{nul}(A) = \infty \Rightarrow$ non(ii), e b): $\gamma(A) = 0 \Rightarrow$ non(ii).

a): in questo caso esiste una successione $x_n \in n(A)$ tale che $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ se $m \neq n$, quindi priva di sottosuccessioni di Cauchy.

b): Poichè $\tilde{A}^{-1}$ è illimitato esiste una successione $\tilde{x}_n \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ tale che $\|\tilde{x}_n\| = \frac{1}{2}$ e $\|\tilde{A}\tilde{x}_n\| \longrightarrow 0$. Dalla relazione $d(x_n, n(A)) = \|\tilde{x}_n\| = \frac{1}{2}$ segue l'esistenza di una successione $y_n \in \tilde{x}_n$ e $\frac{1}{2} \leq \|y_n\| \leq 1$; normalizzando tale successione, se necessario, possiamo assumere $\|y_n\| = 1$ e $\|\tilde{y}_n\| \geq \frac{1}{2}$. Sia y_{n_k} una sottosuccessione convergente ad un elemento $y \in X$. Allora

$$y_{n_k} \longrightarrow y \qquad \text{e} \qquad Ay_{n_k} \longrightarrow 0$$

ed essendo A chiuso segue

$$y \in n(A) \quad ; \quad \|\tilde{y}\| \geq \frac{1}{2}$$

che è assurdo. $\square$

6.17. Teorema. SIANO X E Y SPAZI DI BANACH, A UN OPERATORE LINEARE CHIUSO DI X IN Y E $B: X \to Y$ UN OPERATORE LINEARE A-COMPATTO. ALLORA

a) A E' DI SEMI-FREDHOLM SE E SOLO SE A+B E' DI SEMI-FREDHOLM

b) $\operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A+B)$.

Dim. a) Sia A di semi-Fredholm con nullità finita e mostriamo che se $x_n \in \mathcal{D}_A$ è una successione tale che

$$(6.5) \qquad \|x_n\| = 1 \quad e \quad (A+B)x_n \longrightarrow 0$$

allora esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente.
Per il lemma precedente avremo che A+B è di semi-Fredholm con nullità finita.
Poichè x_n è limitata in $\{\mathcal{D}_A, \tau_{q(A+B)}\} = \{\mathcal{D}_A, \tau_{q_A}\}$ e B è A-compatto esiste una sottosuccessione x_{n_k} tale che

$$Bx_{n_k} \longrightarrow y \in Y$$

e quindi per la (6.5)

$$Ax_{n_k} \longrightarrow y;$$

allora

$$\tilde{x}_{n_k} = \tilde{A}^{-1}Ax_{n_k} \longrightarrow \tilde{A}^{-1}y$$

perchè $\tilde{A}^{-1}$ è continuo essendo $\gamma(A) > 0$.

Poichè nul(A) $< \infty$, x_{n_k} ammette una sottosuccessione convergente analogamente a quanto mostrato nel lemma precedente.

Sia ora nul(A) infinita; allora def(A) $< \infty$.

Considerando A e B come operatori di $\{\mathcal{D}_A, \tau_{g_A}\}$ in Y possiamo assumere $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $B \in K(X,Y)$; passando al trasposto ritorniamo al caso precedente.

Dunque se A è di semi-Fredholm e B è A-compatto A+B è di semi-Fredholm, viceversa se A+B è di semi-Fredholm, poichè $\tau_{g_A} = \tau_{g_{(A+B)}}$, B è anche A+B compatto e quindi A=A+B-B è di semi-Fredholm che completa il punto a).

b) Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ B è $(A+\lambda B)$-compatto, quindi $(A+\lambda B)$-limitato; per il teorema 6.6 la funzione

$$\lambda \in [0,1] \longrightarrow \mathrm{ind}(A+\lambda B) \in \mathbb{Z}$$

è continua e quindi costante essendo a valori discreti, che completa la dimostrazione di b).

$\square$

Come corollario otteniamo la dimostrazione completa preannunciata del teorema dell'alternativa di Fredholm.

6.18. <u>Teorema</u>. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH $A \in K(X)$ E $\lambda \neq 0$ UN NUMERO COMPLESSO. ALLORA

$$\mathrm{nul}(A-\lambda I) = \mathrm{nul}(A'-\lambda I).$$

<u>Dim.</u> Per il teorema precedente $\mathrm{ind}(A-\lambda I)=\mathrm{ind}(\lambda I)=0$. $\square$

Sia A un operatore lineare chiuso dello spazio di Banach X in sé. Abbiamo definito

$$\sigma(A) = \complement P(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,/\, \text{non esiste } (A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X) \right\};$$

definiamo ora

$$\sigma'_{ess}(A) = \complement \mathcal{F}'(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / A-\lambda I \text{ non è di semi-Fredholm} \right\}$$

$$\sigma_{ess}(A) = \complement \mathcal{F}(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / A-\lambda I \text{ non è di Fredholm} \right\}.$$

Chiameremo $\sigma_{ess}(A)$ lo spettro essenziale di A.
Per il corollario 6.14 $\sigma'_{ess}(A)$ e $\sigma_{ess}(A)$ sono sottoinsiemi chiusi del piano complesso; naturalmente anche $\sigma(A)$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{C}$ come segue dal teorema 6.9 e dal suo corollario 6.10 oppure direttamente dal teorema generale di stabilità 6.6.

Poichè se esiste $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ allora A è di Fredholm, e se A è di Fredholm A è di semi-Fredholm segue

$$\sigma'_{ess}(A) \subset \sigma_{ess}(A) \subset \sigma(A) .$$

Abbiamo il seguente corollario del teorema 6.17.

6.19 Corollario. SE $A:X \longrightarrow X$ E' UN OPERATORE LINEARE CHIUSO, E $B:X \longrightarrow X$ E' UN OPERATORE LINEARE A-COMPATTO ALLORA

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+B)$$
$$\sigma'_{ess}(A) = \sigma'_{ess}(A+B) .$$

Dim. Poichè la topologia del grafico di $(A-\lambda I)$ coincide con la topologia del grafico di A, B è $(A-\lambda I)$-compatto per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ ed il corollario segue dall'invarianza della proprietà di (semi)-Fredholm e dell'indice per perturbazioni relativamente compatte. $\square$

6.20. Proposizione. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH E $A:X \longrightarrow X$ UN OPERATORE LINEARE CHIUSO. I PUNTI DI FRONTIERA DI $\sigma(A)$ NON ISOLATI IN $\sigma(A)$ SONO CONTENUTI IN $\sigma'_{ess}(A)$.

Dim. Per il teorema 6.12 se $\lambda \notin \sigma'_{ess}(A)$ allora esiste $\delta_\lambda > 0$ tale che $\mathrm{def}(A-\mu I)$ e $\mathrm{nul}(A-\mu I)$ sono costanti per $0<|\mu-\lambda|<\delta_\lambda$, da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

VI.2. L'OMOMORFISMO "INDICE"; TEOREMA DELL'INDICE PER GLI OPERATORI DI TOEPLITZ.

In questo paragrafo ci occuperemo di operatori di Fredholm limitati. Poichè ogni operatore di Fredholm è un operatore continuo quando lo si faccia agire sul suo dominio munito della topologia del grafico, otterremo dimostrazioni alternative di alcuni teoremi visti nel precedente paragrafo.

Sia X uno spazio di Banach, $\mathcal{B}(X)$ l'algebra di Banach degli operatori lineari continui di X in sé, $K(X)$ l'ideale bilatero degli operatori <u>compatti</u>, e $\eta : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(X)/_{K(X)}$ l'applicazione canonica $A \in \mathcal{B}(X) \longrightarrow \eta(A) = A + K(X)$.

Allora, come vedremo nel lemma 7.9 , $\mathcal{B}(X)/_{K(X)}$ è una algebra di Banach con identità.

6.21. <u>Teorema</u>. UN OPERATORE LINEARE $A \in \mathcal{B}(X)$ E' DI FREDHOLM SE E SOLO SE $\eta(A)$ E' <u>INVERTIBILE</u> IN $\mathcal{B}(X)/_{K(X)}$; INOLTRE PER $A \in \mathcal{B}(X)$ E'

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma(\eta(A)).$$

<u>Dim.</u> La seconda asserzione segue dalla prima. Sia $A \in \mathcal{B}(X)$ un operatore lineare di Fredholm; esistono $P, Q \in \mathcal{B}(X)$ proiettori con

$$PX = n(A) \quad ; \qquad QX = R(A) \quad ;$$

poichè $A|_{(I-P)X}$ è chiuso iniettivo e $R(A|_{(I-P)X}) = R(A)$ è chiuso, esiste un inverso continuo $S_o : R(A) \longrightarrow X$.

Sia $S = S_o Q \in \mathcal{B}(X)$; è

$$SA = SA(I-P) = I-P$$

$$AS = Q = I-(I-Q) \quad ;$$

poichè P è I-Q sono proiettori continui su sottospazi a dimensione finita, P e I-Q sono operatori compatti e

$$SA \in I + \mathcal{K}(X) \tag{6.6}$$

$$AS \in I + \mathcal{K}(X)$$

cioè

$$\eta(A)\eta(S) = \eta(S)\eta(A) = I$$

ove con I indichiamo anche l'identità $\eta(I)$ di $\mathcal{B}(X)/_{\mathcal{K}(X)}$.

Viceversa supponiamo che $A \in \mathcal{B}(X)$ abbia immagine invertibile in $\mathcal{B}(X)/_{\mathcal{K}(X)}$: allora esiste S che soddisfa la (6.6), ossia

$$SA = I+K_1 \quad ; \quad AS = I+K_2$$

con K_1, K_2 appartenenti a $\mathcal{K}(X)$. Quindi segue dalla teoria di

Riesz-Schuder sugli operatori compatti

$$\mathrm{nul}(SA) = \mathrm{nul}(I+K_1) < \infty ,$$
$$\mathrm{def}(AS) = \mathrm{def}(I+K_2) < \infty .$$

Poichè

$$n(A) \subset n(SA) \quad ; \quad R(A) \supset R(AS) ,$$

segue

$$\mathrm{nul}(A) \leq \mathrm{nul}(SA) < \infty ,$$
$$\mathrm{def}(A) \leq \mathrm{def}(AS) < \infty .$$

□

I seguenti corollari sono di immediata verifica, il secondo segue dal lemma 6,4.

6.22. Corollario. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, SE $A \in \mathcal{B}(X)$ E $K \in \mathcal{K}(X)$ ALLORA A E' DI FREDHOLM SE E SOLO SE A+K E' DI FREDHOLM. □

6.23. Corollario. SIA A UN OPERATORE DI FREDHOLM DELLO SPAZIO DI BANACH X IN SE', $\delta = \|\gamma(A)^{-1}\|^{-1}$; SE $B \in \mathcal{B}(X)$ E $\|B\| < \delta$ ALLORA A+B E' DI FREDHOLM. □

Ovviamente questi due corollari si generalizzano al caso di operatori lineari tra due spazi di Banach X e Y.

ESERCIZIO: Imitando il teorema 6.21 e i suoi corollari ridimostrare che se A è un operatore lineare chiuso tra gli spazi di Banach X e Y e $B:X \to Y$ è un operatore lineare A-compatto, allora A è di semi-Fredholm se e solo se A+B è di semi-Fredholm.

6.24. Teorema. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH E $A,B \in \mathcal{B}(X)$ OPERATORI DI FREDHOLM. ALLORA AB E' UN OPERATORE DI FREDHOLM E

$$\operatorname{ind}(AB) = \operatorname{ind}(A) + \operatorname{ind}(B) \tag{6.7}$$

Dim. La prima asserzione segue dal teorema 6.21. Per dimostrare la (6.7) mettiamoci dapprima nel caso in cui

$$n(A) \cap R(B) = \{0\} . \tag{6.8}$$

Allora AB e B hanno lo stesso nucleo e quindi

$$\operatorname{nul}(AB) = \operatorname{nul}(B). \tag{6.9}$$

Sia M un sottospazio lineare chiuso di X tale che

1. M è complementare ad $n(A)$,
2. M contiene $R(B)$;

M è facilmente costruibile: per esempio, se N è un sottospazio complementare ad $R(B)+n(A)$, basta porre $M=R(B)+N$. Allora $A|_M$ è invertibile ed è quindi un isomorfismo di M su $R(A)$. Pertanto la codimensione in $R(A)$ di $R(AB)$ è uguale alla codimensione in M di $R(B)$, ossia

$$\mathrm{def}(AB) - \mathrm{def}(A) = \mathrm{def}(B) - \mathrm{nul}(A)$$

da cui, confrontando con la (6.9), segue

$$\mathrm{ind}(AB) = \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B) .$$

Passiamo ora al caso generale; ci ricondurremo alla situazione (6.8) in due tappe.

a) Possiamo supporre $\mathrm{nul}(A) \leq \mathrm{def}(A)$: Sia $Q=Q^2 \in \mathcal{B}(X)$ un proiettore con

$$\dim Q = n < \infty$$

Allora BQ appartiene a $\mathcal{K}(X)$ e quindi

$$\mathrm{ind}(B(I-Q)) = \mathrm{ind}(B) \quad ;$$

inoltre

$$\mathrm{nul}(B(I-Q)) \geq \mathrm{nul}(I-Q) = n$$

quindi

$$\mathrm{def}(B(I-Q)) \geq n+\mathrm{ind}(B)$$

e possiamo scegliere n tale che

$$\mathrm{def}(B(I-Q) \geq \mathrm{nul}(A) \ .$$

Poichè anche

$$\mathrm{ind}(AB(I-Q)) = \mathrm{ind}(AB)$$

possiamo sostituire B con B(I-Q), cosa che non altera nessun elemento della (6.7), e assumere

$$\mathrm{nul}(A) \leq \mathrm{def}(A) \ .$$

b) Senza mutare gli indici trasformiamo A in modo che valga la (6.8):

Sia $N \subset X$ un sottospazio lineare con $\dim N = \dim R(A) = m$ tale che

$$N \cap R(B) = \{0\}$$

Posto $Y = N + n(A)$, costruiamo per ogni $t \in [0,1]$, un operatore lineare $U(t): Y \to Y$ invertibile tale che:

1. La funzione $t \in [0,1] \longrightarrow U(t) \in \mathcal{B}(Y)$ è continua,
2. $U(0) = I$; $U(1)N = n(A)$.

Sia $\dim(N \cap n(A)) = k \leq m$ e si consideri

$$\{x_1, \dots, x_{m-k}, v_1 \dots, v_k\} \quad \text{base per } N,$$
$$\{y_1, \dots, y_{m-k}, v_1 \dots, v_k\} \quad \text{base per } n(A).$$

Gli operatori $U(t)$ definiti da

$$U(t)x_i = (\cos \tfrac{\pi}{2} t)x_i + (\sin \tfrac{\pi}{2} t)y_i \qquad (i=1,2,\dots,m-k)$$
$$U(t)y_i = (-\sin \tfrac{\pi}{2} t)x_i + (\cos \tfrac{\pi}{2} t)y_i \qquad (i=1,2,\dots,m-k)$$
$$U(t)v_j = v_j \ , \qquad (j=1,2,\dots k)$$

hanno i requisiti richiesti.

Sia $P \in \mathcal{B}(X)$ un proiettore su Y, e si ponga

$$S(t) = I-P+U(t)P \in \mathcal{B}(X)_{reg}$$

ove abbiamo indicato con $\mathcal{B}(X)_{reg}$ il gruppo degli elementi regolari di $\mathcal{B}(X)$.

L'applicazione $t \in [0,1] \to S(t)$ è continua in norma e inoltre

$$S(0) = I \ , \quad S(1)N = n(A) \ ;$$

poichè l'indice è una funzione continua dell'insieme degli operatori di Fredholm in $\mathcal{B}(X)$ negli interi (si veda il teorema 6.6), segue che per ogni t appartenente all'intervallo $[0,1]$

$$\mathrm{ind}(AS(t)) = \mathrm{ind}(A)$$

$$\mathrm{ind}(AS(t)B) = \mathrm{ind}(AB) \quad ;$$

per $t=1$, $n(AS(1)) = N$ e quindi, per quanto dimostrato all'inizio,

$$\mathrm{ind}(AS(1)B) = \mathrm{ind}(AS(1)) + \mathrm{ind}(B)$$

per cui segue

$$\mathrm{ind}(AB) = \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B) \; . \qquad \square$$

Poichè gli operatori di Fredholm di X, X spazio di Banach, sono l'immagine inversa secondo l'applicazione quoziente η degli elementi regolari di $\mathcal{B}(X)/_{K(X)}$, tramite il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\{\text{Op. di Fredholm di } X\} \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\mathrm{ind}"] & \\
\left(\mathcal{B}(X)/_{K(X)}\right)_{reg} \arrow[r, "\mathrm{ind}"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

possiamo definire l'omomorfismo ind: $\left(\mathcal{B}(X)/_{K(X)}\right)_{reg} \to \mathbb{Z}$ ove $\left(\mathcal{B}(X)/_{K(X)}\right)_{reg}$ è il gruppo moltiplicativo degli elementi regolari di $\mathcal{B}(X)/_{K(X)}$ e $\mathbb{Z}$ è il gruppo additivo degli interi. Tale omomorfismo può essere banale, come accade nel caso in cui X è dimensione finita in tal caso $\mathcal{B}(X) = K(X)$ e ind ha codominio $\{0\}$. D'altra parte ind può essere suriettivo: Sia $X=\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita e $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ una base ortonormale per $\mathcal{H}$; sia $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definito da

$$Vf_i = f_{i+1}, \qquad \forall i \in \mathbb{N} \quad ;$$

allora V è una isometria di $\mathcal{H}$ e

$$\mathrm{nul}(V) = 0 \quad , \quad \mathrm{def}(V) = 1,$$

quindi V è un operatore di Fredholm con $\mathrm{ind}(V)=1$; poichè ind è un omomorfismo segue che per ogni intero n esiste un operatore di Fredholm $T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\mathrm{ind}(T_n)=n$; per esempio possiamo porre

$$T_n = V^n \qquad \text{se} \qquad n > 0$$

$$T_n = W^{|n|} \qquad \text{se} \qquad n < 0$$

ove $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è definita da

$$Wf_i = f_{i-1} \quad \text{se} \quad i=1,2,\dots \quad ; \quad Wf_0 = 0 \quad .$$

Poichè V^n, $n > 0$, è un operatore di Fredholm, esiste un inverso di

V^n modulo $\mathcal{K}(\mathcal{H})$: una scelta per tale inverso può essere $W^{|n|}$. Usando la decomposizione polare per operatori appartenenti a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (si veda per esempio REED SIMON §.) è facile vedere ogni operatore di Fredholm in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con indice 0 è connesso ad I con un arco continuo in norma: segue che il gruppo delle componenti connesse di $\left(\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})\right)_{reg}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e l'indice fornisce l'isomorfismo.

Come caso particolare di operatori di Fredholm con indice 0 definiamo la classe degli operatori normali: sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert: diremo che $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è normale se

$$AA^* = A^*A \quad .$$

Poichè

$$n(A) = \left\{ x \in \mathcal{H} \;/\; (x, A^*Ax) = 0 \right\}$$

segue che se A è normale

$$n(A) = n(A^*) = R(A)^{\perp}$$

e quindi, se A è di Fredholm normale, $\mathrm{ind}(A)=0$.

OPERATORI DI WIENER-HOPF

Sia $T = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \}$ la circonferenza unitaria del piano complesso e $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(T) = L^2([0,2\pi], d\vartheta)$ lo spazio delle funzioni $[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ misurabili a quadrato sommabile rispetto alla misura di Lebesgue $d\vartheta$; se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ consideriano la funzione

$$e_n : \vartheta \in [0,2\pi] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\vartheta} \in \mathbb{C}$$

allora $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale per lo spazio di Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$: infatti lo spazio lineare generato dagli e_n è un algebra densa in $C([0,2\pi])$ nella topologia uniforme per il teorema di Stone-Weirstrass e $C([0,2\pi])$ è densa in $L^2([0,2\pi], d\vartheta)$ nella norma di L^2.

Chiamiamo $\mathcal{A}$ la C^*-algebra commutativa $C(T)$ e definiamo l'applicazione $f \in \mathcal{A} \longrightarrow \pi(f) \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$:

$$(\pi(f)x)(\vartheta) = f(e^{i\vartheta})\, x(\vartheta) \ .$$

Appare chiaro che π è una rappresentazione di $\mathcal{A}$, ossia uno *omomorfismo di $\mathcal{A}$ nella C^*-algebra degli operatori lineari limitati di uno spazio di Hilbert. Si noti che $\pi(f)$ è un operatore normale per ogni $f \in \mathcal{A}$.

Sia $\mathcal{H}$ il sottospazio di Hilbert di $\tilde{\mathcal{H}}$ generato da $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ cioè

$$\mathcal{H} = \{ x \in \tilde{\mathcal{H}} / (e_j, x) = 0 \ , \ \forall\, j < 0 \},$$

e sia E il proiettore ortogonale di $\tilde{\mathcal{H}}$ su $\mathcal{H}$ cioè l'operatore $E \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ definito da

$$Ee_j = e_j \quad \text{se} \quad j \geq 0 \quad , \quad Ee_j = 0 \quad \text{se} \quad j < 0,$$

e definiamo la classe degli operatori di Wiener-Hopf in $\mathcal{H}$ come l'insieme $\{ T_f / f \in \mathcal{A} \}$ ove

$$T_f = E\pi(f)E\big|_{\mathcal{H}} \quad , \qquad f \in \mathcal{A}.$$

L'applicazione $f \longrightarrow T_f$ è lineare, conserva l'involuzione cioè $T_{\bar{f}} = T_f^*$, ma <u>non</u> è moltiplicativa e pertanto $f \longrightarrow T_f$ non è una rappresentazione. Vale però il seguente teorema.

6.25. <u>Teorema</u>. L'APPLICAZIONE $f \in \mathcal{A} \longrightarrow T_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ E' MOLTIPLICATIVA ED E' INIETTIVA MODULO I COMPATTI, CIOE'

1. $T_f T_g - T_{fg} \in K(\mathcal{H}) \qquad \forall f,g \in \mathcal{A}$
2. $T_f \in K(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow f = 0.$

<u>Dim.</u> 1. Poichè $\|f\| \leq \|T_f\|$ per ogni $f \in \mathcal{A}$ segue che l'operatore lineare $f \in \mathcal{A} \longrightarrow T_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è limitato e quindi anche l'applicazione

$$f \in \mathcal{A} \longrightarrow T_g T_f - T_{gf} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

è continua per g fissato; inoltre è lineare e quindi è sufficiente dimostrare la 1. quando f è la funzione $z \to f(z)=z^n$; in tal caso

$$(T_g T_f - T_{gf})e_j = 0 \quad \text{se} \quad n+j > 0$$

e pertanto $T_g T_f - T_{gf}$ ha rango finito ed è compatto.

2. Sia T_f compatto e $f \neq 0$. Mostriamo che T è compatto ottenendo quindi un assurdo. Per la 1. anche $T_{|f|^2}$ è compatto; se $f \neq 0$ allora $|f|^2 > \delta > 0$ su un arco $\Gamma \subset T$. Poichè l'operatore lineare $x \in \mathcal{H} \to V(\varphi)x \in \mathcal{H}$,

$$(V(\varphi)x)(z) = x(e^{i\varphi}z) \ , \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

è unitario e $V(\varphi)e_n = e^{in\varphi}e_n$, segue

$$V(\varphi)E = EV(\varphi) \ ,$$
$$V(\varphi)T_g V(\varphi)^{-1} = T_{g_\varphi} \ ,$$

dove $g_\varphi(z)=g(e^{i\varphi}z)$; poichè $V(\varphi)TV(\varphi)^{-1} \in K(\mathcal{H})$ se $T \in K(\mathcal{H})$, ruotando in tal modo $T_{|f|^2}$ otteniamo operatori compatti e possiamo ricoprire T con una famiglia finita di ruotati di Γ; la somma delle funzioni corrispondenti, f_0, è positiva; l'operatore corrispondente T_{f_0} è compatto in quanto somma finita di operatori compatti.

Poichè f_0 è strettamente maggiore di 0, f_0 è invertibile e $f_0^{-1} \in C(T)$, pertanto

$$T_{f_0^{-1}} T_{f_0} \quad \text{è compatto ,}$$

e poichè $I - T_{f_0^{-1}} T_{f_0} \in K(\mathcal{H})$, anche I è compatto, il che è assurdo per- ché $\dim(\mathcal{H}) = \infty$. Ciò dimostra la 2. $\square$

Si noti che dal teorema precedente segue che gli operatori di Wiener-Hopf sono operatori essenzialmente normali nel senso che

$$T_f^* T_f - T_f T_f^* \quad \text{è compatto}$$

per ogni $f \in \mathcal{A}$.

6.26. Corollario. L'INSIEME

$$\mathfrak{A} \equiv \{ T_f + K \,/\, f \in \mathcal{A}, \, K \in K(\mathcal{H}) \}$$

E' UNA SOTTO C^*-ALGEBRA DI $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Dim. Sia $\eta : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$ l'applicazione quoziente canonica e

$$\psi : f \in \mathcal{A} \to \psi(f) = \eta\,(T_f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})/K(\mathcal{H}) \; ;$$

poichè ψ è uno *isomorfismo di una C^*-algebra in una C^*-algebra,

ψ è isometrico come vedremo in seguito; dunque $\psi(\mathcal{A})$ è chiuso, ma

$$\mathfrak{A} \equiv \eta^{-1}(\psi(\mathcal{A}))$$

e pertanto $\mathfrak{A}$ è chiuso. Inoltre $\mathfrak{A}$ è una *algebra, come segue dal punto 1 del teorema precedente.

$\square$

Sia $A \in \mathfrak{A}$; A è esprimibile in modo unico come somma di un operatore di Wiener-Hopf e di un operatore compatto; poniamo simb(A)=f se $A=T_f+K$ e diciamo che la funzione simb(A) è il "simbolo" dell'operatore A.

6.27 Corollario. SIA $A \in \mathfrak{A}$; L'OPERATORE LINEARE A E' DI FREDHOLM SE E SOLO SE simb(A)(z)$\neq$0 PER OGNI $z \in T$. INOLTRE

$$\mathrm{simb}(A)(T) = \sigma_{ess}(A)$$

CIOE' LO SPETTRO ESSENZIALE DI A COINCIDE CON IL CODOMINIO DI simb(A).

Dim. Sia f=simb(A); se f è mai nulla allora f è invertibile e $f^{-1} \in C(T)$; per il punto 1 del teorema precedente

$$T_{f^{-1}}A \in I + K(\mathcal{H})$$

$$AT_{f^{-1}} \in I + K(\mathcal{H})$$

e A è di Fredholm per il teorema 6.21. Viceversa se A è un operatore di Fredholm $\psi(f)$ è invertibile in $\mathcal{B}(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$ e, poichè $\mathfrak{A}$ è una C^*-algebra, $\psi(f)^{-1} \in \mathfrak{A}$, come vedremo più avanti. Ma allora f è invertibile e $f^{-1} = \psi^{-1}(\psi(f)^{-1})$. Il resto del corollario è ormai chiaro. $\square$

Si noti che la condizione $f(z) \neq 0$ per $z \in T$ significa che $f : T \to \mathbb{C}_*$ è una curva chiusa attorno all'origine del piano complesso (abbiamo indicato con $\mathbb{C}_*$ il piano complesso privato dell'origine). Ad una tale f si può associare un intero, deg(f), che indica il "numero di volte che f gira attorno all'origine"; deg(f) prende il nome di grado di f; daremo tra poco una definizione rigorosa di grado di f, prima vogliamo enunciare il teorema dell'indice per gli operatori di $\mathfrak{A}$.

6.28. Definizione. Se $A \in \mathfrak{A}$ diremo che A è "ellittico" se simb(A) è invertibile e in tal caso porremo

$$\text{indice topologico di } A = \deg(\text{simb}(A)) \ .$$

6.29. Teorema. SIA A UN ELEMENTO ELLITTICO DI $\mathfrak{A}$; ALLORA

$$\mathrm{ind}(A) = \text{indice topologico di } A$$

DOVE $\mathrm{ind}(A) = \mathrm{def}(A)-\mathrm{nul}(A)$ E' L' INDICE DI A NEL SENSO ABITUALE.

La dimostrazione di questo teorema richiede alcuni preliminari. Cominciamo con il dare la definizione precisa di grado.
Se $f \in C(T,\mathbb{C}_*)$, cioè se f è una funzione continua di T in $\mathbb{C}_*$, possiamo scrivere

$$f(\vartheta) = |f(\vartheta)|\, e^{i\arg f(\vartheta)} \qquad \forall\, \vartheta \in T,$$

ove $\arg f(\vartheta)$ è definito modulo 2π ; possiamo però scegliere univocamente $\mathrm{Arg}\, f(\vartheta)$ richiedendo:

1. $\mathrm{Arg}\, f(0) \in [0,2\pi)$,
2. La funzione $\vartheta \to \mathrm{Arg}f(\vartheta)$ è continua da $[0,2\pi)$ a $\mathbb{R}$,

ove abbiamo identificato nella maniera usuale T con $[0,2\pi)$.
Definiamo allora

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi}\left[(\mathrm{Arg}f)(2\pi) - (\mathrm{Arg}f)(0)\right] .$$

6.30. Lemma.

(a) LA FUNZIONE $f \in C(T,\mathbb{C}_*) \longrightarrow \deg(f) \in \mathbb{Z}$ E' CONTINUA, OVE $C(T,\mathbb{C}_*)$ E' MUNITO DELLA TOPOLOGIA INDOTTA DA $C(T)$.

(b) PER OGNI $f,g \in C(T,\mathbb{C}_*)$ E'

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) .$$

(c) SI HA $\deg(f)=\deg(g)$, $f,g \in C(T,\mathbb{C}_*)$, SE E SOLO SE f E g SONO OMOTOPE (CIOE' SE ESISTE UNA FUNZIONE CONTINUA $t \in [0,1] \longrightarrow F_t \in C(T,\mathbb{C}_*)$ CON $F_0=f$ e $F_1=g$).

Dim. (a) Siano $f,g \in C(T,\mathbb{C}_*)$ tali che

$$\| f-g \| < \min_{\vartheta \in \mathbb{T}} | f(\vartheta) | \quad ;$$

Una semplice considerazione geometrica mostra che abbiamo la seguente alternativa:

$$\left| \mathrm{Arg}(f) - \mathrm{Arg}(g) \right| < \frac{\pi}{2}$$

oppure

$$\left| \mathrm{Arg}(f) \pm 2\pi - \mathrm{Arg}(g) \right| < \frac{\pi}{2} .$$

In entrambi i casi segue $\left|\deg(f)-\deg(g)\right| < \frac{1}{2}$, cioè $\deg(f)=\deg(g)$.

(b) Se $f,g \in C(T,\mathbb{C}_*)$ possiamo scrivere

$$(fg)(\vartheta) = \left| f(\vartheta) g(\vartheta) \right| e^{i(\mathrm{Arg} f(\vartheta) + \mathrm{Arg}(g(\vartheta)))}$$

che implica

$$\mathrm{Arg}(fg)(\vartheta) = \mathrm{Arg}(f)(\vartheta) + \mathrm{Arg}(g)(\vartheta) + 2\pi n$$

ove l'intero $n \in \mathbb{Z}$ dipende solo da $\mathrm{Arg} f(0)$ e da $\mathrm{Arg}\, g(0)$ e pertanto

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) .$$

(c) Se f e g sono omotope, $\deg(f)=\deg(g)$ per (a). Per il viceversa, in virtù di (b) basta dimostrare che se $\deg(f)=0$ allora f è omotopa a un punto, cioè ad una funzione costante.
Sia $\deg(f)=0$; allora ponendo, per ogni $t\in[0,1]$,

$$F_t(\vartheta) = |f(\vartheta)|^t e^{it\,\mathrm{Arg}\, f(\vartheta)}, \qquad \forall \vartheta \in [0,2\pi) ,$$

abbiamo $F_t(0)=F_t(2\pi)$ per ogni $t\in[0,1]$ (si noti che ciò sarebbe falso se fosse $\deg(t)\neq 0$) e poichè l'applicazione $t\in[0,1] \to F_t \in C(T,\mathbb{C}_*)$ è continua, $F_0=1$, $F_1=f$, segue che f è omotopa a un punto.

$\square$

NOTA. Poichè $f\in C(T,\mathbb{C}_*) \longrightarrow \deg(f)\in\mathbb{Z}$ è una applicazione continua si può calcolare $\deg(f)$ approssimando f:

1. mediante una funzione g <u>analitica</u> in un intorno di T in $\mathbb{C}$: sia Γ una curva chiusa in tale intorno che non attraversi gli zeri di g, allora

$$\deg(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}\,dz\ ;$$

2. mediante una funzione razionale g, cioè

$$g(z) = \sum_{m=n_1}^{m=n_2} c_m z^m \quad , \quad c_m \in \mathbb{C};\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\ ,$$

che non si annulli su T; in tal caso deg(g) è uguale al numero degli zeri di g meno il numero dei poli di g compresi in $\{z / |z| < 1\}$.

Per entrambe le formule rimandiamo a TRICOMI "Funzioni analitiche" o a qualsiasi libro sull'argomento.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema dell'indice.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.29.

Poichè l'indice di un operatore in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è invariante per perturbazioni compatte ed è una funzione continua, come abbiamo visto nei teoremi di stabilità, abbiamo:

1. $\mathrm{ind}(T_f+K) = \mathrm{ind}(T_f)$, $f \in \mathcal{A}$, $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$,

2. l'applicazione $f \in C(T, \mathbb{C}_*) \longrightarrow \mathrm{ind}(T_f) \in \mathbb{Z}$ è continua,

e ciò significa che ind(A), $A \in \mathcal{Ol}$, è funzione solo della classe di omotopia di simb(A), cioè dell'indice topologico di A. Poichè

$$\mathrm{ind}(AB) = \mathrm{ind}(A)+\mathrm{ind}(B) \quad ,$$

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g),$$

basta verificare l'asserto per $f(z)=z$. Ma in questo caso $T_f=V$ ove V è l'isometria definita da

$$Ve_i = e_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

e quindi $\mathrm{ind}(T_f)=1$; d'altra parte è immediato verificare che $\deg(f)=1$ e la tesi è acquisita. $\square$

Note complementari

I risultati di questo paragrafo costituiscono per diversi aspetti caso particolarissimo ed estremamente elementare di diverse teorie generali che sono parti importanti della più avanzata Analisi moderna. Una prima generalizzazione importante si ottiene studiando operatori di Wiener-Hopf il cui simbolo non è una funzione continua. I risultati 6.27 e 6.29 si generalizzano al caso in cui il simbolo appartiene a $H^\infty(T)+\mathcal{C}(T)$ dove H^∞ denota lo spazio di Hardy delle funzioni L^∞ che sono valore al bordo di funzioni analitiche all'intorno del disco unitario. (4, Capitoli 6 e 7, teorema 7.36, in particolare). L'analisi coinvolta è la teoria degli spazi di Hardy, dei sottospazi invarianti e delle funzioni interne, e, indirettamente il teorema "corona" di Carleson sullo spettro dell'algebra di Banach $H^\infty(T)$.

Operatori essenzialmente normali: sono in particolare forniti dagli operatori di Toeplitz studiati in questo paragrafo. Poichè tali operatori sono normali modulo i compatti, la corretta nozione di equivalenza è l'equivalenza unitaria modulo i compatti: $A \sim B$ se esiste un compatto K ed un unitario U tale che $U A U^{-1} = B+K$. Per operatori autoaggiunti A e B tale relazione era stata studiata da Weyl e von Neumann, cf. commenti finali del paragrafo VI.3, dimostrando che in tal caso particolare lo spettro essenziale è un invariante completo. Risultati recenti asseriscono che due operatori essenzialmente normali T_1 e T_2 sullo spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ sono unitariamente equivalenti modulo i compatti se e solo se

(i) $\sigma_{ess}(T_1) = \sigma_{ess}(T_2)$

(ii) $\mathrm{ind}\,(T_1 - \lambda I) = \mathrm{ind}\,(T_2 - \lambda I)$ per ogni $\lambda \notin \sigma_{ess}(T_1) = \sigma_{ess}(T_2)$.

Ne segue che un operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è unitariamente equivalente a una perturbazione compatta di un operatore di Toeplitz se e solo se

a) A è essenzialmente normale;

b) lo spettro essenziale di A è immagine continua del cerchio con una applicazione f per cui

$\deg(f-\lambda)=\mathrm{ind}(A-\lambda 1)$ per ogni $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$ (per esempio tale f esiste sempre se $\sigma_{ess}(A)$ è una curva continua chiusa semplice). (Si vedano le lezioni di Brown, Douglas e Fillmore in Springer Lecture Notes in Mathematics n.345, 1973, e Symposia Mathematica vol.XX).

Di grande importanza è la generalizzazione di tale teoria a famiglie di operatori essenzialmente normali che siano a due a due permutabili modulo i compatti. Una tale famiglia genera assieme ai compatti una C^*-algebra $\mathfrak{A}$ tale che $\mathfrak{A}/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ è una C^*-algebra abeliana separabile con identità, dunque (vedi Capitolo VIII) $\mathcal{C}(X)$, dove X è uno spazio compatto sepabile. Il problema di caratterizzare l'equivalenza unitaria simultanea modulo i compatti per due famiglie del tipo suddetto si traduce nel problema di classificazione a meno di "equivalenza" le estensioni mediante $\mathcal{C}(X)$ dei compatti. L'insieme delle classi di equivalenza si può munire della struttura di gruppo commutativo (la somma essendo fornita dalla somma diretta di rappresentazioni di C(X) nell'algebra di Calkin $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$). Tale gruppo commutativo è un invariante omotopico dello spazio compatto X e, per classi molto generali di spazi compatti, coincide col gruppo commutativo fornito dalla K-teoria (M.F.Atiyah, K-theory, Benjamin 1967). Questi risultati recentis simi forniscono un sorprendente legame tra C^*-algebre e topologia; si vedano i citati volumi, Springer Lecture notes 345 e Symposia Mathematica vol XX.

Un importante capitolo dell'Analisi che connette la Geometria Algebrica alla teoria degli operatori è costituito dal teorema d'indice di Atiyah-Singer. Tale teorema afferma che per operatori lineari pseudodifferenziali ellittici tra varietà compatte l'indice analitico coincide con l'indice topologico. Operatori pseudodifferenziali ellittici tra varietà compatte, se considerati come operatori lineari tra opportuni spazi di Banach, sono operatori di Fredholm e quindi dotati di indice "analitico" come da noi definito (vedi anche L. Hörmander "Linear Partial differential operators" Springer, 1976).

Anche in questo caso generale l'indice topologico è legato al grado del simbolo; per una esposizione elementare vedi M.F.ATIYAH, Comm.Pure and Applied Math.XX, 237 (1967). Per il teorema dell'indice si vedano gli articoli degli Autori sull' Annales of Mathematics vol.87 del 1968 e vol.93 del 1971 e l'articolo di Atiyah-Bott-Patodi, Inventiones Math.vol.19, 279 (1973).

Citiamo infine un'importante connessione con la teoria delle algebre di von Neumann. Singer ed altri hanno studiato operatori di

Toeplitz il cui simbolo anzichè una funzione continua sul cerchio (cioè una funzione periodica di variabile reale) è una funzione quasi periodica sulla retta. Il "grado" di tali funzioni è un numero reale che può essere arbitrario. Gli operatori così ottenuti non sono di Fredholm nel senso abituale, ma lo sono relativamente alla geometria continua di un'algebra di von Neumann di tipo II. L'indice analitico, definito mediante la dimensione relativa di von Neumann (a valori continui nelle algebre di tipoII) coincide con l'indice topologico. Per gli sviluppi di questa teoria si vedano Coburn-Mayer-Singer, Acta Matematica 130 (1973) e riferimenti ivi cit. nonchè il citato vol.XX Symposia Matematica.

VI.3. TEORIA DEGLI OPERATORI HERMITIANI SU SPAZI DI HILBERT: TRASFORMAZIONE DI CAYLEY, CRITERI DI ESISTENZA E CLASSIFICAZIONE DELLE ESTENSIONI AUTOAGGIUNTE; STABILITA' DEGLI INDICI DI DIFETTO.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert complesso e A un operatore lineare densamente definito di $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$. Nel precedente capitolo abbiamo chiamato A <u>hermitiano</u> se verifica una delle proprietà equivalenti:

(i) (x,Ax) è reale $\forall x \in \mathcal{D}_A$,

(ii) $(x,Ay) = (Ax,y) \quad \forall x,y \in \mathcal{D}_A$,

(iii) $A \subset A^*$,

e abbiamo visto che se A è hermitiano allora A è chiudibile (infatti A^* è una estensione chiusa di A) e la chiusura di A, $\bar{A}=A^{**}$, è ancora un operatore hermitiano. Tra gli operatori hermitiani hanno fondamentale importanza gli operatori autoaggiunti.

6.31. Definizione. Un operatore lineare densamente definito dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ in sé A si dice autoaggiunto se

$$A = A^* .$$

Segue dalla definizione che un operatore lineare autoaggiunto è chiuso. Inoltre se A è un operatore autoaggiunto, A è hermitiano massimale, ossia non ammette nessuna estensione propria hermitiana: infatti se B è un operatore lineare di $\mathcal{H}$ tale che

$$A \subset B \subset B^*$$

allora $B^* \subset A^* = A \subset B \subset B^*$ che implica A=B. Il viceversa di questa asserzione è falso ; come vedremo tra poco esistono infatti operatori hermitiani massimali non autoaggiunti.

Dato un operatore hermitiano A è importantissimo sapere quando A ammette estensioni autoaggiunte cioè quando esiste un operatore lineare $\tilde{A}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ tale che

$$A\subset\tilde{A} \quad e \quad \tilde{A}^{*}=\tilde{A},$$

di più ci interessa classificare tutte le eventuali estensioni di A. Vedremo come il problema sia completamente risolto. Nell'affrontare il problema possiamo sempre assumere che l'operatore hermitiano A sia chiuso poichè, ovviamente, ogni estensione chiusa di A è anche estensione della sua chiusura A^{**}.

6,32. Teorema. SIA A UN OPERATORE LINEARE HERMITIANO CHIUSO DELLO SPAZIO DI HILBERT $\mathcal{H}$ IN SE'. ALLORA PER QUALUNQUE NUMERO COMPLESSO z CON PARTE IMMAGINARIA NON NULLA

1. L'OPERATORE $A-zI$ E' DI SEMI-FREDHOLM
2. $\mathrm{def}(A-zI)=n_+$ SE $\mathrm{Im}\, z>0$

   $\mathrm{def}(A-zI)=n_-$ SE $\mathrm{Im}\, z<0$

DOVE n_+ E n_- POSSONO ASSUMERE I VALORI $0,1,2,3,\dots$ O ∞ E SI CHIAMANO INDICI DI DIFETTO DI A.

INOLTRE SE ESISTE λ REALE TALE CHE $A-\lambda I$ E' DI SEMI-FREDHOLM ALLORA $n_+=n_-$.

Dim. Sia $z=\alpha+i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta\neq 0$. Allora per qualunque x nel dominio di A

$$\|(A-zI)x\|^2 = \|(A-\alpha I)x-i\beta x\|^2 =$$

$$=\|(A-\alpha I)x\|^2 + |\beta|^2\|x\|^2+i\beta\left[((A-\alpha I)x,x)-(x,(A-\alpha I)x)\right]$$

e poichè A è hermitiano

$$\|(A-zI)x\|^2 = \|(A-\alpha I)x\|^2+|\beta|^2\|x\|^2 \geq |\mathrm{Im}z|^2\|x\|^2,$$

cioè

$$n(A-zI) = \{0\} \qquad \text{e} \qquad \gamma(A-zI) \geq |\mathrm{Im}z|,$$

che implica il punto 1. Il resto è una diretta conseguenza del teorema generale di stabilità 6.10. $\square$

Uno dei risultati principali che otterremo è che l'operatore hermitiano A ammette estensioni autoaggiunte se e solo se ha uguali indici di difetto n_+ e n_-. Poichè per il precedente teorema lo spettro essenziale $\sigma'_{ess}(A)=\{\lambda\in\mathbb{C} / A-\lambda I$ non è di semi-Fredholm$\}$ è contenuto nella retta reale, la condizione $\sigma'_{ess}(A)\neq\mathbb{R}$ implica che A ammette estensioni autoaggiunte. Un esempio importante di questa situazione è data da un operatore positivo A, cioè $\mathcal{D}_A$ è denso in $\mathcal{H}$ e

$$(x,Ax) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathcal{D}_A .$$

In questo caso, analogamente a quanto si dimostra nel teorema 6.32, si ottiene che $\sigma'_{ess}(A)$ è contenuto nel semiasse positivo reale. Si noti anche che $\sigma_p(A)$ e $\sigma_c(A)$ sono sempre contenuti in $\mathbb{R}$, se A è hermitiano, mentre $\sigma_r(A)$ contiene il semipiano $\mathrm{Im}z > 0$ se e solo se $n_+=0$ e contiene il semipiano $\mathrm{Im}z < 0$ se e solo se $n_-=0$. Dunque, per quanto detto,

$$\sigma_r(A) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow A \text{ è autoaggiunto} \Leftrightarrow \sigma_r(A) = \emptyset,$$

l'ultima equivalenza essendo una conseguenza dell'identità

$$R(A-\lambda I)^{\perp} = n(A-\lambda I) \quad \text{se} \quad A = A^* \quad \text{e } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Consideriamo ora alcuni importanti sottospazi lineari di $\mathcal{H}$ associati all'operatore hermitiano $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$; se $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ sappiamo che $R(A-zI)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ e quindi

$$R(A-zI) = n(A^* - \bar{z} I)^{\perp} = \left\{ x \in \mathcal{D}_{A^*} / A^* x = \bar{z} x \right\};$$

poniamo

$$\mathcal{D}_{\pm} = R(A \pm iI) \ ,$$

$$\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{D}_{\pm}^{\perp} = \{x \in \mathcal{D}_{A^*} / A^* x = \mp ix\} ;$$

allora, per definizione, dim $\mathcal{H}_{\pm} = n_{\pm}$ e

$$\mathcal{H}_{\pm} \cap \mathcal{D}_A = \{0\} \ ,$$

essendo $A \pm iI$ operatori iniettivi.

6.33. <u>Definizione</u>. Sia $A: \mathcal{D}_A \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore hermitiano chiuso: poichè $A+iI$ è iniettivo possiamo definire l'operatore $S_o(A)$, o in breve S_o, definito su $\mathcal{D}_+$

$$S_o : (A+iI)x \longrightarrow (A-iI)x \qquad \forall x \in \mathcal{D}_A ;$$

l'operatore S_o è chiamato la <u>trasformata di Cayley</u> di A.

Osserviamo subito alcune proprietà della trasformata di Cayley:

a) $S_o(A)$ <u>è isometrico</u>: infatti

$$\|(A+iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 = \|(A-iI)x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A ;$$

b) $n(I-S_o) = \{0\}$ e $R(I-S_o) = \mathcal{D}_A$ è denso; quando x varia nel dominio di A, $(A+iI)x$ percorre tutto $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_{S_o} = \mathcal{D}(I-S_o)$; poichè

$$(I-S_0)(A+iI)x = 2ix\,, \qquad \forall x \in \mathcal{D}_A\,,$$

segue b);

c) differenti operatori hermitiani hanno diverse trasformate di Cayley: infatti nota la trasformata di Cayley S_0 di A possiamo riottenere l'operatore A tramite la formula

(6.10) $$A = i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}.$$

Per provare la (6.10) si osservi che da

$$(I-S_0)(A+iI)x = 2ix\,, \qquad \forall x \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{(I-S_0)^{-1}},$$

segue

$$(A+iI)x = 2i(I-S_0)^{-1}x\,, \quad \forall x \in \mathcal{D}_{(I-S_0)^{-1}}\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned} A &= 2i(I-S_0)^{-1} - iI = \\ &= 2i(I-S_0)^{-1} - i(I-S_0)(I-S_0)^{-1} = \\ &= i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}\,. \end{aligned}$$

Vedremo che le proprietà a) e b) caratterizzano gli operatori che sono trasformate di Cayley di operatori hermitiani. Ci necessita una parentesi sugli operatori parzialmente isometrici.

6.34. <u>Definizione</u>. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Un operatore $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una <u>isometria parziale</u> se esiste M, sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$, tale che

$$\|Sx\| = \|x\| \qquad \text{se} \qquad x \in M \;,$$
$$Sx = 0 \qquad \text{se} \qquad x \in M^{\perp}.$$

Il sottospazio M prende il nome di dominio iniziale di S e il sottospazio R(S) di dominio finale di S.

6.35. <u>Proposizione</u>. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT, ALLORA:

1. SE $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ E' UNA ISOMETRIA PARZIALE, ALLORA S^*S E' IL PROIETTORE ORTOGONALE SUL DOMINIO INIZIALE DI S.

2. SE $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ E' UN OPERATORE TALE CHE S^*S E' IDEMPOTENTE, ALLORA S E' UNA ISOMETRIA PARZIALE CON DOMINIO INIZIALE $R(S^*S)$.

3. UN OPERATORE $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ E' UNA ISOMETRIA PARZIALE SE E SOLO SE S^* E' UNA ISOMETRIA PARZIALE; IL DOMINIO INIZIALE DI S^* E' IL DOMINIO FINALE DI S E VICEVERSA.

<u>Dim.</u>1. Dobbiamo provare che, se M è il dominio iniziale di S,

$$S^*Sx=0 \quad \text{se} \quad x \in M^{\perp} \quad \text{e} \quad S^*Sx=x \quad \text{se} \quad x \in M \;;$$

la prima è ovvia; sia $z=S^*Sx-x$, allora

$$(y,z) = (Sy,Sx) - (y,x), \qquad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Se $y \in M$, poichè $S|M$ è isometrico

$$(y,z) = (y,x) - (y,x) = 0$$

e se $y \in M^{\perp}$

$$(y,z) = 0-0 = 0$$

dunque $z=0$.

2. Se $x \in R(S^{*}S)$ segue

$$\|Sx\|^2 = (S^{*}Sx,x) = \|x\|^2,$$

d'altra parte $S|R(S^{*}S)^{\perp} = 0$ per motivi analoghi.

3. Se S è una isometria parziale e $E=S^{*}S$ allora $S=SE$, quindi

$$SS^{*}S = SE = S \text{ che implica } \quad SS^{*}SS = SS^{*}$$

e S^{*} è una isometriaparziale per 2. Poichè il dominio iniziale di S è il sottospazio ortogonale a $n(S)$, l'ultima affermazione è conseguenza di

$$n(S)^{\perp} = R(S^{*})^{\perp\perp} = R(S^{*}) .$$

$\square$

6.36. <u>Teorema</u>. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A:\mathcal{D}_A\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ UN OPERATORE LINEARE HERMITIANO CHIUSO.

ALLORA $\mathcal{D}_{A^*}$ E' SOMMA DIRETTA (ALGEBRICA) DI $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$:

$$\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A + \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_- ,$$

CIOE' OGNI VETTORE $x\in\mathcal{D}_{A^*}$ E' UNICAMENTE ESPRIMIBILE COME

$$x = x_0 + x_+ + x_-$$

CON $x_0\in\mathcal{D}_A$, $x_+\in\mathcal{H}_+$, $x_-\in\mathcal{H}_-$ E

$$A^* x = Ax_0 + ix_+ - ix_- .$$

<u>Dim.</u>

Poichè $\mathcal{H}_+\subset\mathcal{D}_{A^*}$ e $\mathcal{H}_-\subset\mathcal{D}_{A^*}$ è

$$\mathcal{D}_A + \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_- \subset \mathcal{D}_{A^*};$$

inoltre $\mathcal{D}_A, \mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$ sono linearmente indipendenti, perchè se

$$x_0+x_++x_-=0, \quad x_0\in\mathcal{D}_A, \; x_+\in\mathcal{H}_+, \; x_-\in\mathcal{H}_-,$$

allora

$$(A+iI)x_0+2ix_+=(A^*+iI)(x_0+x_++x_-) = 0 ,$$

che implica $x_0=x_+=0$ essendo x_+ appartenente a $R(A+iI)^{\perp}$, e quindi anche $x_-=0$.

Non resta da provare che

$$\mathcal{D}_{A^*} \subset \mathcal{D}_A + \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_- .$$

Sia $B=\frac{1}{2i}(A+iI)$; allora se $S_0=S_0(A)$ è la trasformata di Cayley di A

$$(I-S_0)Bx = x , \qquad \forall x \in \mathcal{D}_A ,$$

che implica

$$B(I-S_0)z=z , \qquad \forall z \in \mathcal{D}_+ =R(B).$$

Poniamo $S=S_0E$ ove $E=S^*S$ è il proiettore ortogonale su $\mathcal{D}_{S_0}=\mathcal{D}_+$.
Se $y\in\mathcal{D}_{A^*}=\mathcal{D}_{B^*}$ esiste $y'\in\mathcal{H}$ tale che

$$(y,B(I-S)z) = (y',(I-S)z) , \quad \forall z \in \mathcal{D}_+ ,$$

perchè $(I-S)\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_B$, e quindi

$$(y-(I-S^*)y',z)=0, \qquad \forall z \in \mathcal{D}_+ ,$$

cioè $y-(I-S^*)y'\in \mathcal{D}_+^{\perp}=\mathcal{H}_+$; ma allora

$$\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_{B^*} \subset R(I-S^*)+ \mathcal{H}_+ ;$$

ora

$$I-S^* = I-SS^* + (S-I)S^*$$

per cui

$$R(I-S^*) \subset R(I-SS^*) + R((S-I)S^*) = \mathcal{H}_- + \mathcal{D}_A$$

ed in conclusione

$$\mathcal{D}_{A^*} \subset \mathcal{D}_A + \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_- .$$

□

Il precedente teorema ha come conseguenza che un operatore hermitiano è autoaggiunto se e solo se ha indici di difetto entrambi nulli, cioè se ha la sua trasformata di Cayley è un operatore unitario; ciò appare ancor più chiaro nel teorema che segue.

6.37. Teorema. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT; LA TRASFORMAZIONE DI CAYLEY STABILISCE UN ISOMORFISMO D'ORDINE TRA I DUE INSIEMI PARZIALMENTE ORDINATI

1. TUTTI GLI OPERATORI LINEARI HERMITIANI CHIUSI SU $\mathcal{H}$ (CON DOMINIO DENSO);
2. TUTTI GLI OPERATORI LINEARI ISOMETRICI CHIUSI S SU $\mathcal{H}$ CON CODOMINIO DI I-S DENSO;

DOVE L'ORDINE DI 1. e 2. E' INDOTTO DA $T \supset R$, CIOE' T SEGUE R, SE T E' UNA ESTENSIONE DI R.

Dim. Abbiamo già visto che la trasformazione di Cayley è una applicazione iniettiva di 1. in 2. (vedi osservazioni seguenti la definizione 6.32); se dimostriamo che la trasformata di Cayley $A\in 1. \longrightarrow S_0(A)\in 2.$ è suriettiva avremo la tesi perchè dalle formule

$$S_0=S_0(A) = (A-iI)(A+iI)^{-1},$$

$$A = i(I+S_0)(I-S_0)^{-1},$$

segue che $A\subset B$ se e solo se $S_0(A)\subset S_0(B)$ per arbitrari $A,B\in 1.$.
Sia allora S_0 un operatore lineare chiuso isometrico di $\mathcal{H}$ tale che $R(I-S_0)$ sia denso; mostriamo che $n(I-S_0)=\{0\}$. Infatti se E è il proiettore ortogonale su $\mathcal{D}_{(I-S_0)}=\mathcal{D}_{S_0}$ e poniamo $S=S_0E$, allora S è una isometria parziale che estende S_0 e

$$n(I-S_0)\subset n(I-S)=R(I-S^*)^{\perp}\subset R((I-S^*)S)^{\perp}=R(S-E)^{\perp}\subset R(S_0-E)^{\perp}=R(S_0-I)^{\perp}=\{0\},$$

quindi $I-S_0$ è iniettivo e si può definire

$$A = i(I+S_0)(I-S_0)^{-1}; \tag{6.11}$$

allora A è ovviamente un operatore lineare chiuso e densamente definito; inoltre A è hermitiano, cioè

$$(Az,z) \text{ è reale} \qquad z\in\mathcal{D}_A=R(I-S_0);$$

infatti per ogni $x\in\mathcal{D}_{S_0}$

$$(A(I-S_0)x,\ (I-S_0)x) = i((I+S_0)x,\ (I-S_0)x) =$$

$$= i((x,x) - (S_0x,S_0x)) - i((x,S_0x) - (S_0x,x)) =$$

$$= i((S_0x,x) - \overline{(S_0x,x)}) \in \mathbb{R}$$

poichè $\|S_0x\|^2 = \|x\|^2$.

Ma allora S_0 è la trasformata di Cayley di A cioè

$$S_0 = (A-iI)(A+iI)^{-1}$$

come segue facilmente dalla (6.11), il che completa la dimostrazione.

□

Il teorema precedente riconduce il problema di trovare estensioni hermitiane di un operatore hermitiano chiuso A al problema, molto più semplice, di trovare estensioni isometriche dell'operatore isometrico S_0.

E' chiaro che S_0 non possiede estenzioni proprie isometriche se uno degli indici di difetto n_+ oppure n_- è nullo; infatti in tal caso S_0 ha il dominio o il codominio uguale a tutto lo spazio.

Se $n_+=\dim \mathcal{H}_+ \neq 0$ e $n_-=\dim \mathcal{H}_- \neq 0$ e per esempio $n_+ \leq n_-$ possiamo trovare una isometria parziale V di $\mathcal{H}$ con dominio iniziale $\mathcal{H}_+$ e dominio finale contenuto in $\mathcal{H}_-$; sia E il proiettore autoaggiunto su $\mathcal{H}_+$ e poniamo $S=S_0E$; allora S+V è una isometria che estende S_0; sia

A_V la antitrasformata di Cayley di S+V ; allora A_V è un operatore hermitiano massimale che estende A. Dalla formula

$$A_V = i(I+S+V)(I-S-V)^{-1}$$

segue

$$\mathcal{D}_{A_V} = R(S+V-I) = \mathcal{D}_A + (I-V)\mathcal{H}_+$$

ed inoltre se $x \in \mathcal{D}_A$ e $z \in \mathcal{H}_+$

$$A_V(x+(I-V)z) = Ax+i(I+V)z \ .$$

Se $n_+=n_-$, quindi se il dominio finale di V è $\mathcal{H}_-$, allora A è auto aggiunto. Esplicitiamo il caso $n_+=n_-=n<\infty$; esiste una base ortonormale $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ di $\mathcal{H}_+$ e una base ortonormale $\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$ di $\mathcal{H}_-$ tale che

$$V|_{\mathcal{H}_+} : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \ , \qquad \lambda_j \in \mathbb{C};$$

segue che $\mathcal{D}_{A_V}$ è lo spazio lineare generato da $\mathcal{D}_A$ e u_j-v_j (j=1,2,...,) e A_V è l'operatore lineare su $\mathcal{D}_{A_V}$ tale che

$$A_V|_{\mathcal{D}_A} = A \ , \quad A_V(u_j-v_j)=i(u_j+v_j) \qquad (j=1,2,\ldots n)$$

Quindi il problema di determinare le estensioni autoaggiunte di A è ricondotto al problema, molto più semplice, di determinare le estensioni unitarie di S_o; ciò è possibile se e solo se $n_+=n_-$; se $n_+=n_-\neq 0$ allora S_o ammette infinite estensioni unitarie e quindi A ammette infinite estensioni autoaggiunte. Abbiamo allora dimostrato il seguente corollario.

6.38 Corollario. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E A UN OPERATORE LINEARE HERMITIANO CHIUSO DI $\mathcal{H}$. L'OPERATORE A E' HERMITIANO MASSIMALE SE E SOLO SE HA UNO DEGLI INDICI DI DIFETTO NULLO; E' AUTOAGGIUNTO SE HA ENTRAMBI GLI INDICI DI DIFETTO NULLI; POSSIEDE ESTENSIONI AUTOAGGIUNTE SE E SOLO SE HA INDICI DI DIFETTO UGUALI.

Vogliamo ancora notare che la trasformata di Cayley non solo pone una corrispondenza tra gli operatori autoaggiunti A e gli operatori unitari U con R(I-U) denso, ma anche tra gli operatori autoaggiunti limitati e gli operatori unitari tali che $1\in P(U)$; infatti poichè la antitrasformata di Cayley è data da

$$A = i(I+U)(I-U)^{-1},$$

A è ovunque definito, cioè limitato essendo A chiuso, se e solo se $R(I-U)=\mathcal{H}$, che appunto equivale a dire $1\in P(U)$, essendo I-U chiuso ed iniettivo.

ESEMPI

1. Sia $\mathcal{H}=L^2([0,1],dq)$ dove dq è la misura di Lebesgue su $[0,1]$ e

$$\mathcal{D}_A=\left\{x\in\mathcal{H}/x'\in\mathcal{H}\ ,\ x(0)=x(1)=0\right\}$$

intendo con $x'\in\mathcal{H}$ che x è una funzione assolutamente continua su $[0,1]$ la cui derivata appartiene a $L^2([0,1],dq)$; sia poi A l'operatore $i\frac{d}{dq}$ con dominio $\mathcal{D}_A$

$$A:x\in\mathcal{D}_A\longrightarrow ix'\in\mathcal{H}.$$

Allora A è chiuso perchè $A=A^{**}$ ed è hermitiano con indici di difetto $n_+=n_-=1$.

Le estensioni autoaggiunte di A sono tutte del tipo A_α , $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$,

$$A_\alpha\ :\ x\in\mathcal{D}_{A_\alpha}\rightarrow x'\in\mathcal{H}$$

con
$$\mathcal{D}_{A_\alpha}=\left\{x\in\mathcal{H}/x'\in\mathcal{H},\ \ x(1)=\alpha x(0)\right\}.$$

Per dettagli si veda REED SIMON Vol.II pag.141.

2. Sia $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R},dq)$, dq=misura di Lebesgue, $\mathcal{D}_A$ lo spazio delle funzioni in $L^2(\mathbb{R},dq)$ assolutamente continue con derivata in $L^2(\mathbb{R},dq)$.

Se A è l'operatore $i\frac{d}{dq}$ con dominio $\mathcal{D}_A$

$$A : x \in \mathcal{D}_A \longrightarrow ix' \in \mathcal{H},$$

allora A è autoaggiunto.

Si veda YOSIDA pag.198 .

3. Sia $\mathcal{H} = L^2([0,1],ds)$, ove ds è la misura di Lebesgue,

$$\mathcal{D}_A = \{x \in \mathcal{H} / x', x'' \in \mathcal{H};\ x(0)=x(1)=x'(0)=x'(1)=0\}$$

e $A = \frac{1}{p}\frac{d}{ds}p\frac{d}{ds}+q$; p,q funzioni due volte derivabili e positive in $[0,1]$.

Allora A è hermitiano con indici di difetto (2,2). Per ogni estensione autoaggiunta $\tilde{A}$ di A, se $\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, $(A-\lambda I)^{-1}$ è compatto (Dunford-Schawartz, vol.II, [5]).

4. Sia $\mathcal{H} = L^2([0,\infty),dq)$, dq essendo la misura di Lebesgue,

$$\mathcal{D}_A = \{x \in \mathcal{H} / x' \in \mathcal{H},\ x(0)=0\}$$

e A l'operatore $i\frac{d}{dq}$ su $\mathcal{D}_A$

$$A : x \in \mathcal{D}_A \longrightarrow ix' \in \mathcal{D}_A .$$

Allora $A=A^{**}$ è hermitiano chiuso con indici di difetto $(n_+,n_-)=(0,1)$; quindi A non ammette estensioni autoaggiunte.

5. Sia $\mathcal{H}=\ell^2(\mathbb{N})$, ossia $\mathcal{H}$ è uno spazio di HIlbert separabile con una base ortonormale $\{e_0,e_1,e_2,\dots\}$; sia poi S la isometria di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definita da

$$Se_j=e_{j+1} \qquad \text{per} \qquad j\in\mathbb{N}$$

allora S^* è l'isometria parziale di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definita da

$$S^*e_j=e_{j-1} \quad \text{se} \quad j\in\mathbb{N}-\{0\}\ , \quad S^*e_0=0.$$

Segue che $R(I-S)$ è denso perchè se $x\in n(I-S^*)=R(I-S)^{\perp}$ e $x=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j e_j$, $\lambda_j\in\mathbb{C}$, allora $\lambda_j=\lambda_{j+1}$ per ogni $j\in\mathbb{N}$, cioè $x=0$, perchè $\{\lambda_j\}\in\ell^2(\mathbb{N})$.

Se A_0 è la antitrasformata di Cayley di S

$$A_0=i(I+S)(I-S)^{-1}$$

A è un operatore hermitiano chiuso con indici di difetto (0,1).

<u>Osservazione:</u> Se E è un proiettore autoaggiunto che commuta con S cioè

$$ES=SE$$

allora $E=I$ oppure $E=0$; lasciamo per esercizio la dimostrazione di questa asserzione usando

$$ES=SE \Rightarrow ES^n=S^nE \Rightarrow ES^nS^{n*}=S^nS^{n*}E \Rightarrow Ee_n \in \mathbb{C}e_n \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Segue che non esistono sottospazi M <u>propri</u> chiusi di $\mathcal{H}$ tali che

$$SM \subset M \quad , \quad SM^\perp \subset M^\perp,$$

e quindi non esistono sottospazi M chiusi <u>propri</u> di $\mathcal{H}$ tali che

$$\mathcal{D}_{A_0} = \mathcal{D}_{A_0}\cap M + \mathcal{D}_{A_0}\cap M^\perp$$
$$A_0(\mathcal{D}_{A_0}\cap M) \subset M$$
$$A_0(\mathcal{D}_{A_0}\cap M^\perp) \subset M^\perp,$$

ossia l'operatore hermitiano A_0 è <u>irriducibile</u>; al contrario ogni operatore autoaggiunto è "completamente riducibile" come vedremo in seguito nel teorema spettrale.

Vogliamo ora mostrare che ogni operatore hermitiano massimale è somma diretta di un operatore autoaggiunto e di un certo numero di volte di operatori hermitiani tipo, che agiscono come l'operatore A_0 nell'esempio 5 (o come $-A_0$).

Sia allora A un operatore hermitiano massimale; allora la trasformata di Cayley di A è una isometria o una coisometria, cioè $S_0(A)$

è un operatore isometrico con dominio o codominio tutto lo spazio. Sostituendo A con -A, se occorre, possiamo suppore che $S_0(A)$ sia una isometria. Ma una isometria si può decomporre secondo la seguente decomposizione di Wold,

6.39. Proposizione. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E S UNA ISOMETRIA DI $\mathcal{H}$. ALLORA

$$S = U \oplus [S_0 \oplus S_0 \oplus S_0 \oplus \ldots]$$

DOVE U E' UN OPERATORE UNITARIO E S_0 E' L'OPERATORE DI TRASLAZIONE DI UN PASSO (CHE AGISCE CIOE' COME L'OPERATORE S DELL'ESEMPIO 5). IN ALTRE PAROLE ESISTE UNA DECOMPOSIZIONE ORTOGONALE DELLO SPAZIO

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus [\mathcal{H}_{S_0} \oplus \mathcal{H}_{S_0} \oplus \mathcal{H}_{S_0} \oplus \ldots]$$

TALE CHE $S|_{\mathcal{H}_U}$ E' UN OPERATORE UNITARIO DI $\mathcal{B}(\mathcal{H}_U)$, GLI $\mathcal{H}_{S_0}$ SONO ISOMORFI A $\ell^2(\mathbb{N})$ E $S|_{\mathcal{H}_{S_0}}$ E' L'OPERATORE DI TRASLAZIONE DI UN PASSO. IL NUMERO DI COPIE DI $\mathcal{H}_{S_0}$ PUO' ESSERE FINITO O INFINITO.

Dim. Poniamo

$$\mathcal{H}_U = \bigcap_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{H};$$

è chiato che $\mathcal{H}_U$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ invariante per S e che $S|_{\mathcal{H}_U}$ è un operatore unitario di $\mathcal{B}(\mathcal{H}_U)$.

Anche il sottospazio $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_U^{\perp}$ è invariante per S.

Se $\mathcal{H}_0 \neq 0$ allora anche $\mathcal{H}_0 \ominus S\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0 \cap (S\mathcal{H})^{\perp}$ è non banale e

$$\mathcal{H}_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n(\mathcal{H}_0 \ominus S\mathcal{H}_0).$$

Sia $\{u_\alpha, \alpha \in I\}$ una base ortonormale di $\mathcal{H}_0 \ominus S\mathcal{H}_0$, dove I è un insieme di indici; se poniamo

$$\mathcal{H}_{S_0} = [u_\alpha, Su_\alpha, S^2u_\alpha, \dots \quad]$$

cioè $\mathcal{H}_{S_0}$ è lo spazio di Hilbert generato dalla famiglia ortonormale $\{u_\alpha, Su_\alpha, S^2u_\alpha, \dots\}$ allora $\mathcal{H}_{S_0}$ è uno spazio di Hilbert separabile, che possiamo identificare con $\ell^2(\mathbb{N})$, per ogni $\alpha \in I$, ed è chiaro che $S|_{\mathcal{H}_{S_0}}$ è l'operatore di traslazione di un passo. Poichè $\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{H}_{S_0}$ segue

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus [\mathcal{H}_{S_0} \oplus \mathcal{H}_{S_0} \oplus \mathcal{H}_{S_0} \oplus \dots]. \qquad \square$$

- In virtù della precedente proposizione possiamo ottenere la richiesta decomposizione di un operatore hermitiano massimale: sia A un operatore hermitiano con indice di difetto $n_+ = 0$ e $S = S_0(A)$ la sua trasformata di Cayley che è una isometria; allora se

$$S = U \oplus [S_0 \oplus S_0 \oplus \dots \quad]$$

è la decomposizione di Wold di S , si ha

$$A = H \oplus [A_0 \oplus A_0 \oplus \dots\dots]$$

dove H è l'operatore autoaggiunto antitrasformata di Cayley di U e A_0 è l'operatore hermitiano massimale la cui trasformata di Cayley è S_1, l'operatore di traslazione di un passo.

Naturalmente i due casi limite si ottengono quando A=H (A è autoaggiunto), e quando H=0 e $A=A_0$ cioè A è l'operatore descritto nell'esempio 5.

Vogliamo ora dare una seconda possibile identificazione dell'operatore A_0.

Sia $\mathcal{H} = L^2([0,\infty), ds)$ ove ds è la misura di Lebesgue,

$$\mathcal{D}_A = \{ f \in \mathcal{H} / f' \in \mathcal{H} \ , \ f(0) = 0 \}$$

e A l'operatore $i\frac{d}{ds}$ su $\mathcal{D}_A$

$$A : f \in \mathcal{H} \longrightarrow if' \in \mathcal{H}.$$

Allora A è un operatore hermitiano chiuso e il suo aggiunto A^* è l'operatore

$$A^* : x \in \mathcal{D}_{A^*} \rightarrow ix' \in \mathcal{H} ,$$

ove $\mathcal{D}_{A^*}$ è lo spazio delle funzioni in $L^2([0,\infty),ds)$ che sono assolutamente continue con derivata in $L^2([0,\infty),ds)$. Allora è facile vedere che

$$R(A+iI)^{\perp} = n(A^*-iI) = 0$$

$$R(A-iI)^{\perp} = n(A^*+iI) = \mathbb{C}x_0, \quad x_0(s)=e^{-s} .$$

Pertanto A ha indici di difetto $(n_+,n_-)=(0,1)$ e la sua trasformata di Cayley $S_0=S_0(A)$ è una isometria con $R(S_0)^{\perp}=\mathbb{C}x_0$.
Segue che $\{x_0, S_0x_0, S_0^2x_0, \ldots\}$ è una famiglia ortonormale di $\mathcal{H}$; inoltre poichè

$$S_0 = I-2\left(I+\frac{d}{ds}\Big|_{\mathcal{D}_A}\right)^{-1}$$

$$\left(I+\frac{d}{ds}\Big|_{\mathcal{D}_A}\right)^{-1} s^n e^{-s} = \frac{1}{n+1}\, s^{n+1}e^{-s}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

segue che $\{x_0, S_0x_0, S_0^2x_0, \ldots\}$ è un sistema ortonormale completo, dato che la varietà lineare da esso generata contiene tutte le funzioni $s \to p(s)e^{-s}$ con $p(s)$ polinomio. Pertanto S_0 è l'operatore di traslazione di un passo e $A=A_0$.
Diamo ora due definizioni.

6.40 Definizione: Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore hermitiano. Diremo che A è essenzialmente autoaggiunto se la sua chiusura è autoaggiunta cioè se

$$A^{**} \quad \text{è autoaggiunto}$$

cioè se

$$A^{*} \quad \text{è autoaggiunto.}$$

6.41 Definizione. Sia X uno spazio di Banach, $A: \mathcal{D}_A \subset X \to X$ un operatore lineare chiuso e $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_A$ un sottospazio lineare. Diremo che $\mathcal{D}$ è un core per A se $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{D}_A$ nella topologia del grafico, cioè se la chiusura di $A|_{\mathcal{D}}$ è A.

Segue che se A è un operatore autoaggiunto, il dominio $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_A$ è un core per A se e solo se $A|_{\mathcal{D}}$ è essenzialmente autoaggiunto.

ESEMPIO: Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, d^n q)$ dove $d^n q$ è la misura di Lebesgue sui boreliani di $\mathbb{R}^n$. Se consideriamo l'operatore

$$A = -\Delta \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}$$

che agisce sull'insieme $\mathcal{D}_A$ delle funzioni infinitamente derivabili e a supporto compatto, allora A è un operatore essenzial mente autoaggiunto (si veda KATO ch V, § 5).

Abbiamo visto che in generale un operatore hermitiano non possiede estensioni autoaggiunte; ciò non toglie che possano esistere estensioni autoaggiunte in uno spazio di Hilbert più grande di quello di partenza. Infatti se A è un operatore hermitiano di con indici di difetto (m,n) allora -A ha indici di difetto (n,m) e quindi l'operatore $A \oplus -A$ che agisce su $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ha indici di difetto (m+n, m+n) uguali e possiede pertanto estensioni autoaggiunte.

ESERCIZIO: Applicare il precedente argomento all'operatore $i\frac{d}{ds}$ in $L^2([0,\infty),ds)$ che agisce su

$$\mathcal{D}_A = \{ x \in L^2 / x' \in L^2,\ x(0)=0 \}$$

descrivendo le estensioni autoaggiunte e discutendone il significato.

PERTURBAZIONI DI OPERATORI HERMITIANI ED AUTOAGGIUNTI

6.42 Proposizione SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT COMPLESSO; SIANO A,B OPERATORI HERMITIANI CHIUSI DENSAMENTE DEFINITI DI $\mathcal{H}$ IN SE'; SE B E' A-LIMITATO CON A-LIMITE b e $\lambda \in \mathbb{R}$, L'OPERATORE HERMITIANO PERTURBATO VERIFICA:

$$n_{\pm}(A+\lambda B) = n_{\pm}(A) \qquad \text{se} \quad |\lambda| < b^{-1}.$$

Dim. Dire che B è A-limitato con coefficienti $a,b>0$ significa dire che $\mathcal{D}_B \supset \mathcal{D}_A$ e

$$\|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \qquad \forall x \in \mathcal{D}_A; \tag{6.12}$$

una condizione equivalente alla (6.12) è che esistano $a', b'>0$ tali che

$$\|Bx\|^2 \leq a'^2\|x\|^2 + b'^2\|Ax\|^2 \qquad \forall x \in \mathcal{D}_A \tag{6.13}$$

dove, in generale, $a' \neq a$ e $b' \neq b$; se vale la (6.13) è chiaro che vale la (6.12) coefficienti $(a, b) = (a', b')$; d'altra parte non è difficile dimostrare che, se vale la (6.12), allora la (6.13) è verificata con coefficienti

$a' = a + \frac{1}{\varepsilon}$ e $b' = b + \varepsilon$ per un arbitrario $\varepsilon > 0$.

Dalla (6.13) segue, per ogni $x \in \mathcal{D}_A$,

$$\|Bx\|^2 \leq b'^2\left(\frac{a'^2}{b'^2}\|x\|^2 + \|Ax\|^2\right) = b'^2\left\|\left(A \pm i\frac{a'}{b'}I\right)x\right\|^2$$

cioè B è $\left(A \pm i\frac{a'}{b'}I\right)$-limitato con coefficienti $(0,b')$. Poichè $A \pm \frac{a'}{b'}iI$ è un operatore di semi-Fredholm iniettivo segue dai teoremi di stabilità per la proprietà di semi-Fredholm, che

$$n_\pm(A+\lambda B) = \operatorname{def}\left(A+\lambda B \pm i\frac{a'}{b'}I\right) = \operatorname{def}\left(A \pm i\frac{a'}{b'}I\right) = n_\pm(A)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $|\lambda| < b'^{-1}$. Poichè possiamo scegliere b' vicino quanto vogliamo a b, segue la tesi.

□

6.43 Corollario. SIA $A \subset A^*$ UN OPERATORE ESSENZIALMENTE AUTOAGGIUNTO DELLO SPAZIO HILBERT $\mathcal{H}$, E SIA B: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ UN OPERATORE HERMITIANO A-LIMITATO CON A-LIMITE MINORE DI 1; ALLORA A+B E' UN OPERATORE ESSENZIALMENTE AUTOAGGIUNTO.

Dim. Conseguenza diretta del corollario 6.38 e dalla stabilità della chiudibilità per pertubazioni relativamente limitate.

□

6.44 Proposizione. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT, A UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO DI $\mathcal{H}$ E B UN OPERATORE LINEARE DI $\mathcal{H}$ HERMITIANO ED A-COMPATTO; ALLORA

A+B è AUTOAGGIUNTO,

$$\sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A).$$

Dim. Come la proposizione precedente, e per l'invarianza per perturbazioni relativamente compatte del carattere di "semi-Fredholm". □

ESEMPIO: Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3q)$, ove d^3q è la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^3$

$A = -\frac{1}{2m}\Delta$ ($m > 0$ è la massa dell'elettrone) dove Δ è l'operatore di Laplace che abbiamo visto nel precedente esempio;

$B = -\frac{e^2}{r}$ (e > o è il modulo della carica dell'elettrone)

dove $-\frac{e^2}{r}$ è l'operatore di di moltiplicazione in L^2 per $-\frac{e^2}{r}$, cioè $\frac{e^2}{r}$ è la funzione $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \frac{e^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{D}_B = \{ f \in L^2 \,/\, \tfrac{e^2}{r} f \in L^2 \}$$

$$B: f \in \mathcal{D}_B \longrightarrow -f\tfrac{e^2}{r} \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3q).$$

Allora B è A-compatto e

$$\sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A) = \sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \lambda \geq 0 \}$$

$\sigma(A+B) \setminus \sigma_{ess}(A+B) =$ livelli energetici dell'atomo di idrogeno non relativistico.

Per questo esempio rimandiamo al cap V, § 5 del libro di Kato; qui è dimostrato in generale che se B è l'operatore di moltiplicazioni in L^2 per una funzione f, dove

1. f è reale
2. $f \in L^\infty + L^2$ e l'addendo in L^∞ si annulla all'infinito

allora B è A-compatto, $A = -\Delta$.

Osservazione: Se A è un operatore autoaggiunto dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è: $n(A) = R(A)^{\perp}$; segue, ragionando per $A-\lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, che

$A-\lambda I$ è di semi-Fredholm $\Longleftrightarrow$ $A-\lambda I$ è di Fredholm

cioè

$$\sigma'_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A)$$

Poichè $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, ogni $\lambda \in \sigma(A)$ è punto di accumulazione di P (A); quindi se λ non è un punto isolato di $\sigma(A)$ allora λ appartiene a $\sigma_{ess}(A)$. (Proposizione 6.20).

Se λ è un punto isolato di $\sigma(A)$, segue dai fondamenti della teoria spettrale che, detta δ la distanza di λ da $\sigma(A)$

$$\gamma(A-\lambda I) = \delta,$$

quindi per un tale λ vale

$$\lambda \in \sigma_{ess}(A) \Longleftrightarrow \text{nul}\,(A-\lambda I) = \infty,$$

cioè $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ se e solo se $\lambda \in \sigma_p^{\infty}(A)$,dove $\sigma_p^{\infty}(A)$ è l'insieme degli autovalori di A di molteplicità infinita.

Nell'esempio dell'atomo di idrogeno era

$$\sigma_p^{\infty}(A) = \sigma_p^{\infty}(A+B);$$

ciò non vale in generale.

Vediamo ora l'importante teorema di Weyl- von Neumann, senza dimostrazione, che ci permette di approssimare un operatore autoaggiunto con un altro operatore autoaggiunto che abbia spettro puntuale puro.

6.45 Definizione. Un operatore autoaggiunto A di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ha spettro puntuale puro se gli autovettori di A formano una base in $\mathcal{H}$.

Se l'operatore autoaggiunto A ha spettro puntuale puro allora $\sigma(A)$ è la chiusura di $\sigma_p(A)$; per questa asserzione e per la dimostrazione del seguente teorema di Weyl- von Neumann rimandiamo citato libro di Kato, Ch.10,§1,2.

.46 Teorema . SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT SEPARABILE E A UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO DI $\mathcal{H}$. PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO $B_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ TALE CHE

$$\mathrm{Tr}\,(B_\varepsilon^* B_\varepsilon) < \infty$$

E $A+B_\varepsilon$ HA SPETTRO PUNTUALE PURO .

Notiamo soltanto che essendo B_ε un operatore di Hilbert - Schmidt, B_ε è un operatore compatto.

NOTE COMPLEMENTARI

Sia T un operatore lineare su uno spazio di Hibert $\mathcal{H}$. Un vettore $\xi \in \mathcal{H}$ è detto analitico per T se $\xi \in \mathcal{D}(T^n)$ per ogni n=1,2,......

ed inoltre la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} T^n \xi \qquad (6.14)$$

ha raggio di convergenza non nullo.

Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ogni $\xi \in \mathcal{H}$ è analitico per T e la serie (6.14) ha raggio di convergenza infinito e converge a e^{zt} (cfr capitolo VII, calcolo funzionale analitico). Se T non è necessariamente limitato ma T è densamente definito ed autoaggiunto, allora T ha un insieme denso di vettori analitici.

Infatti per ogni intervallo limitato Δ, la restrizione di T al sottospazio spettrale E (Δ) (cfr Capitolo VIII) è un operatore limitato quindi ogni $\xi \in E(\Delta)\mathcal{H}$ è analitico per T, e ciò vale per ogni Δ.

Un importante Teorema di Nelson (13, Th. X.39) dice che inversamente, se T è hermitiano ed esiste un insieme $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_T$ tale che (i) $\mathcal{D}_0$ è denso in $\mathcal{H}$ (ii) ogni $\xi \in \mathcal{D}_0$ è analitico per T; allora T è essenzialmente autoaggiunto.

Generalizzazioni ulteriori del Teorema di Nelson utilizzano il concetto di vettore quasi-analitico (P.R. Chernoff, Bull. Amer. Math Soc. 81 637, 1975).

Se $T = T^*$ e ξ è analitico per T, per $z = it$, $t \in \mathbb{R}$, la serie (6.14) converge a e^{zt} definito come calcolo funzionale continuo di T (Cap. VIII).

Gli operatori $\mathcal{U}(t) = e^{itT}$ sono unitari perchè $|e^{it\lambda}| = 1$ (Cap. VIII) e costituiscono una rappresentazione dal gruppo additivo dei reali:

$$\mathcal{U}(t+t') = \mathcal{U}(t)\,\mathcal{U}(t').$$

Tale rappresentazione è fortemente continua:

$$\mathcal{U}(t)\, x \to x \qquad \text{se } t \to 0, \qquad \text{ogni} \quad x \in \mathcal{H}.$$

Il teorema di Stone (13, Th. VIII.7) afferma che viceversa ogni tale rappresentazione V (t) di $\mathbb{R}$ ammette un generatore autoaggiunto, cioè esiste uno ed un sol operatore autoaggiunto H sullo spazio di Hilbert ove opera V (t) tale che

$$V(t) = e^{i\,t\,H}, \qquad t \in R. \tag{6.15}$$

Per generalizzazioni ai semi gruppi ad un parametro sugli spazi di Banach e di Hilbert si veda KATO (9) HILLE - PHILLIPS (8)

Una importante generalizzazione di tale teorema va sotto il nome di teorema di Stone - Naimark - Ambrose - Godement ; il gruppo $\mathbb{R}$ è sostituito da un generico gruppo topologico commutativo e localmente compatto G; ogni rappresentazione unitaria $\mathcal{U}$ fortemente continua di G su uno spazio di Hilbert è caratterizzato unicamente da una misura spettrale sul gruppo duale $\hat{G}$; tale misura spettrale generalizza la misura spettrale dE (λ) del generatore H di V (t) nella (6.15) (Cap. VIII), (cfr NAIMARK, Cap.VI, 27).

In termini della misura spettrale di $\mathcal{U}$ fornita dal teorema SNAG è difficile desumere degli invarianti unitari completi; tali invarianti si ottengono dalla teoria della riduzione e della teoria della molteplicità spettrale (vedi cenni finali del cap.VIII).

Tale teoria è particolarmente soddisfacente se G è separabile e coincide con l'analoga teoria per le C^*- algebre $\mathfrak{A}$ abeliane separabili (Naimark Cap. VI, § 29; Dixmier C^*- algebre Cap.XIII), dove $\mathfrak{A}$ si può intendere come la C^* - algebra di gruppo $C^*(G)$.

Tale teoria estende al caso di C^*-algebre, ovvero gruppi localmente compatti, separabili non commutativi, purchè $\mathfrak{A}$ ovvero $C^*(G)$ sia di tipo I; si ottiene così la teoria spettrale non commutativa (Dixmier, C^*-algebre Cap.XVIII)

La teoria spettrale non commutativa nel caso non tipo I non è ancora completa; recentemente sono stati fatti tuttavia notevoli progressi (cfr. Symposia Mathematica vol. XX, in particolare relazione di A. Connes).

VII. ALGEBRE DI BANACH E CALCOLO FUNZIONALE ANALITICO. PERTURBAZIONI DELLO SPETTRO DEGLI OPERATORI LINEARI CHIUSI.

VII.1. TRASFORMAZIONE DI GELFAND.

Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra di Banach; diremo che $\mathfrak{A}$ è un'algebra di Banach con identità se esiste un elemento $I \in \mathfrak{A}$ di norma 1 tale che $AI=IA=A$ per ogni A .
Esempi di algebre di Banach con identità sono $\mathcal{B}(X)$, ove X è uno spazio di Banach e $C(K)$, ove K è uno spazio topologico compatto. Notiamo che ogni algebra di Banach $\mathfrak{A}$ può essere immersa in un'algebra di Banach con identità $\mathfrak{A}_1$; infatti basta prendere come $\mathfrak{A}_1$ le somme formali di $\mathfrak{A}$ con i complessi

$$\mathfrak{A}_1 \equiv \{ A+\lambda I \, / \, A \in \mathfrak{A} , \lambda \in \mathbb{C} \}$$

e porre $\|A+\lambda I\| = \|A\| + |\lambda|$ per ogni $A+\lambda I \in \mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{A}_1$ è chiaramente completa perché $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ come spazio di Banach.
Come nel caso in cui $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(X)$ definiamo:

7.1. DEFINIZIONE.

Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra di Banach con identità I; l'insieme risolvente $\rho(A)$ dell'elemento $A \in \mathfrak{A}$ è

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \, / \, \exists (A-\lambda I)^{-1} \in \mathfrak{A} \}$$

dove con $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathfrak{A}$ intendiamo dire che $A-\lambda I$ possiede un inverso bilaterale appartenente ad $\mathfrak{A}$. Il complementare in $\mathbb{C}$ dell'insieme risolvente

$$\sigma(A) = \complement \rho(A)$$

si chiama lo spettro di A (in $\mathfrak{A}$).

.2. TEOREMA.

IA $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA'; ALLORA PER OGNI A $\in \mathcal{O}\!\mathcal{L}$, P(A)
' UN APERTO DEL PIANO COMPLESSO E LA FUNZIONE

$$\lambda \in P(A) \longrightarrow R(\lambda) \equiv (A-\lambda I)^{-1}$$

E' ANALITICA.

Dimostrazione.

Sia $\lambda_0 \in P(A)$; se $\lambda \in \mathbb{C}$ è

$$A-\lambda I = (A-\lambda_0 I)(I+(\lambda_0-\lambda)R(\lambda_0))$$

per cui se $|\lambda-\lambda_0|\,\|R(\lambda_0)\|<1$, $A-\lambda I$ è invertibile come prodotto di elementi invertibili; segue che l'intorno di λ_0

$$\{\lambda\in\mathbb{C} / |\lambda-\lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}\}$$

è in P(A) che è dunque aperto.

Inoltre in tale intorno:

$$R(\lambda) = (I+(\lambda_0-\lambda)R(\lambda_0))^{-1}R(\lambda_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n R(\lambda_0)^{n+1}$$

e quindi $R(\lambda)$ è una funzione analitica in P(A).

$\square$

Chiameremo $R(\lambda) \equiv R_A(\lambda)$ il risolvente di A.

7.3. TEOREMA

SIA $\mathcal{O}\!\mathcal{L} \neq \{0\}$ UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA'. PER OGNI A $\in \mathcal{O}\!\mathcal{L}$ LO
SPETTRO DI A E' NON VUOTO E

$$\sigma(A) \subseteq \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq \|A\| \}.$$

Dim.

Se $|\lambda| > \|A\|$

$$A - \lambda I = -\lambda (I - \lambda^{-1} A)$$

è invertibile e

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - |\lambda|^{-1}\|A\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|},$$

quindi $(A - \lambda I)^{-1}$ esiste per $|\lambda| > \|A\|$ è $R(\lambda)$ tende a 0 quando $|\lambda|$ tende all'infinito.

Se fosse $\sigma(A) = \emptyset$ avremmo $P(A) = \mathbb{C}$ e quindi la funzione

$$\lambda \in \mathbb{C} \longrightarrow R(\lambda) \in \mathfrak{A}$$

sarebbe una funzione intera che si annulla all'infinito; per il teorema di Liouville $R(\lambda)$ sarebbe identicamente nulla e quindi

$$I = (A - \lambda I)\, R(\lambda) = 0,$$

ma $I = 0$ implica $\mathfrak{A} = \{0\}$. $\square$

Se A è un elemento dell'algebra di Banach con identità $\mathfrak{A}$ definiamo il raggio spettrale di A, spr(A), come

$$\mathrm{spr}(A) = \mathrm{Max} \{ |\lambda| \,/\, \lambda \in \sigma(A) \}.$$

7.4. TEOREMA.

SIA $A \in \mathfrak{A}$, DOVE $\mathfrak{A}$ E' UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA'. ALLORA LA SUCCESSIONE $\|A^n\|^{1/n}$ E' CONVERGENTE E

$$\mathrm{spr}(A) = \lim_n \|A^n\|^{1/n} = \inf\{\|A^n\|^{1/n} / \ n \in \mathbb{N}\}.$$

<u>Dim.</u>

Per $|\lambda| > \|A\|$ il risolvente di A è la funzione analitica

$$R(\lambda) = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}A^n;$$

segue che $R(\lambda)$ ha raggio di convergenza ρ nella variabile (λ^{-1}) dato da

$$\rho^{-1} = \overline{\lim_n} \|A^n\|^{1/n}.$$

Poiché per definizione $\rho^{-1} = \mathrm{spr}(A)$, basta dimostrare che la successione converge al suo estremo inferiore.

Posto

$$a_n = \log\|A^n\|$$

notiamo che a_n è una successione subadditiva, cioè

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \qquad \forall\, m,n \in \mathbb{N},$$

perché $\|A^{m+n}\| = \|A^m A^n\| \leq \|A^m\| \ \|A^n\|$; poiché il logaritmo è una funzione continua e crescente la tesi segue dall'affermazione che per ogni successione a_n subadditiva, a_n/n è convergente e

$$\lim_{n} \frac{a_n}{n} = \inf\left\{\frac{a_n}{n} \Big/ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Per dimostrare ciò fissiamo $m \in \mathbb{N}$ e sia

$$n = qm + r, \qquad 0 \leqslant r < m, \qquad q \in \mathbb{N} \;;$$

per la subadditività di a_n è

$$a_n \leqslant qa_m + a_r,$$

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{q}{n} a_m + \frac{a_r}{n} \;;$$

quando n tende all'infinito, $\frac{a_r}{n}$ tende a 0 e $\frac{q}{n}$ tende a $1/m$, quindi

$$\overline{\lim_{n}} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}$$

che implica

$$\overline{\lim_{n}} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf\left\{\frac{a_n}{n} \Big/ n \in \mathbb{N}\right\} \leqslant \underline{\lim_{n}} \frac{a_n}{n}$$

che conclude la dimostrazione.

$\square$

7.5 COROLLARIO.

SIA A UN ELEMENTO DELL'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA' $\mathfrak{A}$; ALLORA SE $\lambda \in P(A)$

$$d(\lambda, \sigma(A))^{-1} = \operatorname{spr}(R(\lambda))$$

<u>Dim</u>.

E' una conseguenza diretta del teorema precedente, notato che

$$P(R(\lambda)) = P((A-\lambda I)^{-1}) = \{(\alpha-\lambda)^{-1} / \alpha \in P(A)-\{\lambda\}\} \cup \{0\}.$$

$\square$

l seguente è il teorema di Mazur.

.6 TEOREMA

LA $\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA' I. SE OGNI ELEMENTO DI $\mathfrak{A}$ DIVERSO

A O E' INVERTIBILE IN $\mathfrak{A}$, ALLORA

$$\mathfrak{A} = \mathbb{C} \cdot I$$

OE' $\mathfrak{A}$ E' ISOMORFA AL CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI SE $\mathfrak{A} \neq \{0\}$.

m.

$\mathfrak{A} = \{0\}$ il teorema è banale. Sia $A \in \mathfrak{A} \neq \{0\}$, $A \neq 0$; allora $\sigma(A) \neq \emptyset$:

$z \in \sigma(A)$ segue che $A-zI$ è non invertibile, quindi $A-zI = 0$ e $A \in \mathbb{C}\cdot I$.

7. TEOREMA

A $\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH COMMUTATIVA CON IDENTITA' I E A UN ELEMENTO DI $\mathfrak{A}$.

SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

) A NON E' INVERTIBILE IN $\mathfrak{A}$;

i) ESISTE UN IDEALE MASSIMALE PROPRIO DI $\mathfrak{A}$ CHE CONTIENE A.

m.

i) $\Rightarrow$ (i): se A è invertibile, $\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}$; segue che l'unico ideale che contiene A è l'intera algebra.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): se A non è invertibile $\mathfrak{A}A$ è un ideale proprio di $\mathfrak{A}$ in quanto $I \notin \mathfrak{A}A$. Per il lemma di Zorn esiste allora un ideale massimale proprio che contiene $\mathfrak{A}A$ e quindi A. $\square$

NOTA: Se $\mathfrak{A}$ è un'algebra di Banach e I è l'identità di $\mathfrak{A}$, ogni ideale massimale è chiuso. Infatti se M è un ideale di $\mathfrak{A}$, M non contiene elementi invertibili e quindi

$$M \cap \{B \in \mathfrak{A} / \|B-I\| < 1\} = \emptyset$$

e pertanto anche

$$\overline{M} \cap \{B \in \mathfrak{A} / \|B-I\| < 1\} = \emptyset .$$

Dai teoremi 7.6 e 7.7 segue:

7.8. COROLLARIO.

SE $\mathfrak{A}$ E' UN'ALGEBRA DI BANACH COMMUTATIVA CON IDENTITA' I E PRIVA DI IDEALI PROPRI, ALLORA $\mathfrak{A} = \mathbb{C} \cdot I$. $\square$

Notiamo che il precedente corollario è <u>falso</u> se $\mathfrak{A}$ non è commutativa: per esempio si può dimostrare che l'algebra delle matrici n per n sul corpo complesso è priva di ideali bilateri propri.

7.9. LEMMA.

SE $\mathfrak{A}$ E' UN'ALGEBRA DI BANACH E M E' UN IDEALE BILATERO CHIUSO DI $\mathfrak{A}$, ALLORA $\mathfrak{A}/M$ E' UN'ALGEBRA DI BANACH; INOLTRE SE $\mathfrak{A}$ CONTIENE UN'IDENTITA' I, ANCHE

$\mathfrak{A}/_M$ HA UN'IDENTITA'.

Dim.

Sappiamo che $\mathfrak{A}/M$ è uno spazio di Banach. Inoltre se I è l'identità di $\mathfrak{A}$ è ovvio che $\tilde{I} = I+M$ è l'identità dell'algebra $\mathfrak{A}/M$. Dobbiamo dimostrare solo che

$$\|\tilde{A}\tilde{B}\| \leq \|\tilde{A}\|\,\|\tilde{B}\|, \qquad \forall\, \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathfrak{A}/_M .$$

Sia $\varepsilon > 0$ e $A \in \tilde{A}$, $B \in \tilde{B}$ tali che

$$\|A\| < \|\tilde{A}\| + \varepsilon, \quad \|B\| < \|\tilde{B}\| + \varepsilon,$$

allora

$$\|\tilde{A}\tilde{B}\| = \|\widetilde{AB}\| \leq \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \leq (\|\tilde{A}\|+\varepsilon)(\|\tilde{B}\|+\varepsilon)$$

e dall'arbitrarietà di ε segue

$$\|\tilde{A}\tilde{B}\| \leq \|\tilde{A}\|\,\|\tilde{B}\|.$$

$\square$

NOTA: Si dimostra che se $\mathfrak{A}$ è una C^*-algebra e M è un ideale bilatero chiuso di $\mathfrak{A}$, allora $M = M^* = \{A^*/A \in M\}$ e $\mathfrak{A}/M$ è una C^*-algebra (si veda J. Dixmier - Les C^*-algebres et leur représentations - § 1-8).

7.10. PROPOSIZIONE

SE $\mathfrak{A}$ E' UN 'ALGEBRA DI BANACH COMMUTATIVA CON IDENTITA' I E $M \subset \mathfrak{A}$ E' UN IDEALE MASSIMALE, ALLORA

$$\mathfrak{A}/M = \mathbb{C} \cdot \tilde{I}.$$

Dim.

Per il teorema 7.6 basta dimostrare che se $A \notin M$ allora $\tilde{A}$ è invertibile. Se ciò non fosse esisterebbe un ideale proprio $\tilde{N}$ di $\mathfrak{A}/M$ contenente A; ma allora $\eta^{-1}(\tilde{N}) = N$ è un ideale proprio di $\mathfrak{A}$ contenente M (abbiamo indicato come al solito con η l'applicazio quoziente); ciò è un assurdo perchè M è massimale.

$\square$

La precedente dimostrazione ci permette di identificare gli ideali massimali dell'algebra di Banach commutativa con identità $\mathfrak{A}$ con i nuclei degli omomorfismi di $\mathfrak{A}$ sui complessi. Sia infatti M un ideale massimale di $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A} \neq \{0\}$) e ϕ l'applicazione di $\mathfrak{A}$ su $\mathbb{C}$ tale che

$$A \in \mathfrak{A} \longrightarrow \phi(A)\tilde{I} = \eta(A) \in \tilde{\mathfrak{A}}$$

sia l'omomorfismo quoziente. Allora è chiaro che ϕ è un omomorfismo di $\mathfrak{A}$ su $\mathbb{C}$ il cui nucleo è M. Viceversa se ϕ è un omorfismo di $\mathfrak{A}$ su $\mathbb{C}$ allora $n(\phi)$ è un ideale massimale, infatti ha codimensione 1.

$\square$

7.11. COROLLARIO.

SE $\mathfrak{A}$ E' UN'ALGEBRA DI BANACH COMMUTATIVA CON IDENTITA' I, PER OGNI $A \in \mathfrak{A}$ E'

$$\sigma(A) = \{ \phi(A) / \phi \text{ omomorfismo di } \mathfrak{A} \text{ su } \mathbb{C} \}.$$

Dim.

Se $\lambda \in \sigma(A)$, allora $A-\lambda I$ è non invertibile, quindi esiste un ideale massimale che contiene $A-\lambda I$ e quindi un omomorfismo ϕ di $\mathfrak{A}$ su $\mathbb{C}$, precisamente l'omofismo quoziente, tale che $\phi(A-\lambda I)=0$, cioè $\lambda=\phi(A)$. Viceversa se ϕ n omomorfismo di $\mathfrak{A}$ su $\mathbb{C}$ allora

$$A-\phi(A)I \in n(\phi),$$

$n(\phi)$ è ideale proprio di $\mathfrak{A}$ e quindi $A-\phi(A)I$ non è invertibile e $\phi(A)\in\sigma(A)$.

$\square$

ue allora direttamente:

2. COROLLARIO.

$\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH COMMUTATIVA CON IDENTITA' E ϕ UN OMOMORFISMO DI $\mathfrak{A}$ $\mathbb{C}$. ALLORA

$$|\phi(A)| \leq \operatorname{spr}(A) \leq \|A\|.$$

$\square$

gue dal precedente corollario che ogni omomorfismo dell'algebra di Banach com-tativa con identità $\mathfrak{A}$ appartiene al duale topologico dello spazio di Banach $\mathfrak{A}$, più appartiene alla palla unità di $\mathfrak{A}^*$.

13. DEFINIZIONE.

spettro $\sigma(\mathfrak{A})$ dell'algebra di Banach commutativa con identità $\mathfrak{A}$ è l'in-eme degli omomorfismi di $\mathfrak{A}$ su $\mathbb{C}$ munito della topologia indotta da $\sigma(\mathfrak{A}^*,\mathfrak{A})$, oé della topologia *debole di $\mathfrak{A}^*$.

Per definizione $\sigma(\mathfrak{A})$ è l'insieme degli omomorfismi ϕ di $\mathfrak{A}$ in $\mathbb{C}$ tali che $\phi(I) = 1$, quindi

$$\sigma(\mathfrak{A}) = \{f \in \mathfrak{A}^* / \langle f, I\rangle = 1\} \cap \Big(\bigcap_{A,B\in\mathfrak{A}} \{f\in\mathfrak{A}^* / \langle f,A\rangle\langle f,B\rangle = \langle f,AB\rangle\}\Big).$$

Segue che $\sigma(\mathfrak{A})$ è intersezione di insiemi chiusi, ed è quindi un sottoinsieme $*$ debolmente chiuso della palla unità di $\mathfrak{A}^*$; per il teorema di Banach-Alaoglu $\sigma(\mathfrak{A})$ è allora compatto.

7.14. DEFINIZIONE.

Sia $\mathfrak{A}$ un algebra di Banach commutativa con identità e $C(\sigma(\mathfrak{A}))$ lo spazio delle funzioni continue $\sigma(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}$. La trasformazione di Gel'fand di $\mathfrak{A}$ è l'applicazione $A\in\mathfrak{A} \to \hat{A} \in C(\sigma(\mathfrak{A}))$ che associa all'elemento $A \in \mathfrak{A}$ la restrizione a $\sigma(\mathfrak{A})$ dell'immagine di A nel biduale $\mathfrak{A}^{**}$. Più esplecitamente $\hat{A}$ è la funzione su $\sigma(\mathfrak{A})$ definita da

$$\hat{A}(\phi) = \phi(A), \qquad \phi \in \sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}^*.$$

E' subito visto che la trasformazione di Gel'fand è un omomorfismo algebrico di norma 1 di $\mathfrak{A}$ in $C(\sigma(\mathfrak{A}))$. Infatti

$$\|\hat{A}\| = \mathrm{spr}(A) \leq \|A\|.$$

Il nucleo dell'omomorfismo di Gel'fand prende il nome di radicale di $\mathfrak{A}$: esso è costituito dagli elementi nilpotenti generalizzati di $\mathfrak{A}$, cioè dagli elementi $A \in \mathfrak{A}$ tali che $\mathrm{spr}(A) = 0$, cioè $\sigma(A) = \{0\}$. Ovviamente il radicale è un ideale di $\mathfrak{A}$. Vedremo come la trasformata di Gel'fand di una C^*-algebra commutativa con identità sia un isomorfismo suriettivo e isometrico ed in tal caso il radicale è quindi costituito dal solo O.

Vogliamo ora compiere qualche indagine nel caso di un'algebra di Banach commutativa generata da un numero finito di elementi. Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra di Banach con identità I e $\mathcal{A}$ la sottoalgebra di Banach generata da un elemento $A \in \mathfrak{A}$ e dall'entità I. E' chiaro che $\mathcal{A}$ è commutativa. Possiamo decomporre l'insieme risolvente di A, P(A), come

$$P(A) = P^{\infty}(A) \cup P'(A)$$

dove $P^{\infty}(A)$ è la componente connessa di P(A) che contiene il punto all'infinito e $P'(A) = P(A) - P^{\infty}(A)$.

NOTA: In generale se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono due algebre di Banach con la stessa identità tali che $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, allora per un elemento $A \in \mathfrak{A}$ si ha $\sigma_{\mathfrak{B}}(A) \subseteq \sigma_{\mathfrak{A}}(A)$; però nel caso in cui $\mathfrak{A}$ sia un'algebra commutativa e $\mathfrak{B}$ un'algebra abeliana massimale che contenga $\mathfrak{A}$ si ha

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A) = \sigma_{\mathfrak{B}}(A)$$

ciò perché se esiste $R_A(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, certo $R_A(\lambda)$ appartiene a ogni algebra abeliana massimale contenente A.

7.15. PROPOSIZIONE.

SIA $\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA' I E $\mathcal{A}$ LA SOTTOALGEBRA DI BANACH GENERATA DALL'ELEMENTO $A \in \mathfrak{A}$ E DA I. INDICATO CON $P_{\mathcal{A}}(A)$ E $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ L'INSIEME RISOLVENTE E LO SPETTRO DI A IN $\mathcal{A}$, ALLORA

a) $P_{\mathcal{A}}(A) = P^{\infty}(A)$

b) $\sigma(\mathcal{A})$ è omeomorfo a $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$.

<u>Dim.</u>

a) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è tale che $|\lambda| > \mathrm{spr}(A)$, allora $R_A(\lambda)$ appartiene ad $\mathcal{A}$ perché limite in norma della serie di Neumann $-\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}A^n$; per continuazione analitica $R_A(\lambda) \in \mathcal{A}$ se $\lambda \in P^{\infty}(A)$. Se $P'(A)$ è non vuoto, $R(\lambda)$ non è ottenibile per continuazione analitica quando $\lambda \in P'(A)$; mostriamo che, inoltre, non è in $\mathcal{A}$. Se $\lambda_0 \in P_{\mathcal{A}}(A)$, $R_A(\lambda_0)$ è limite di una successione $p_n(A)$ di polinomi di A. Quindi se $q_n(\lambda) = 1-(\lambda-\lambda_0)p_n(\lambda)$, la successione di polinomi $q_n(\lambda)$ verifica

$$q_n(A) = I - p_n(A)(A-\lambda_0 I) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(7.1)
$$q_n(\lambda_0) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostriamo che λ_0 non può appartenere a $P'(A)$.

Notiamo che in generale se q è un polinomio allora

$$|q(\lambda)| \leq \|q(A)\|, \quad \forall \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(A); \tag{7.2}$$

infatti se $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(A)$ allora esiste $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$ tale che $\phi(A) = \lambda$ e quindi

$$q(\lambda) = q(\phi(A)) = \phi(q(A))$$

che implica la (7.2). Per il principio del massimo la (7.2) vale anche per λ che varia nelle regioni racchiuse dallo spettro cioè

$$|q(\lambda)| \leq \|q(A)\| , \qquad \forall \lambda \notin P^{\infty}(A);$$

segue allora che la (7.1) è contraddittoria se $\lambda_0 \notin P^{\infty}(A)$; dunque $P_{\mathcal{A}}(A) \subseteq P^{\infty}(A)$, anzi $P_{\mathcal{A}}(A) = P^{\infty}(A)$ avendo prima provato la inclusione opposta.

b) L'applicazione

$$\phi \in \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \phi(A) \in \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

è continua, per definizione, ed è iniettiva e suriettiva. Poiché $\sigma(\mathcal{A})$ è uno spazio topologico compatto e $\mathbb{C}$ è uno spazio topologico di Hausdorff, tale applicazione è un omeomorfismo di $\sigma(\mathcal{A})$ su $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$. $\square$

Il punto b) del precedente teorema ha la seguente generalizzazione:

7.16. PROPOSIZIONE.

SIA $\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH COMMUTATIVA CON IDENTITA' GENERATA DA UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$; ALLORA $\sigma(\mathfrak{A})$ E' OMEOMORFO A UN SOTTOINSIEME COMPATTO DI $\mathbb{C}^n$.

Dim.

La dimostrazione è come nel teorema precedente data la continuità dell'applicazione iniettiva

$$\phi \in \sigma(\mathfrak{A}) \longrightarrow (\phi(A_1), \ldots, \phi(A_n)) \in \sigma(A_1) \times \ldots \times \sigma(A_n)$$

da uno spazio compatto a uno spazio di Hausdorff. $\square$

Il sottoinsieme di $\sigma(A_1) \times \ldots\ldots \times \sigma(A_n)$, in generale proprio, che è omeomorfo a $\sigma(\mathfrak{A})$ nel teorema precedente si chiama lo spettro simultaneo di $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathfrak{A}$.

VII.2. FUNZIONI ANALITICHE DI UN ELEMENTO IN UN ALGEBRA DI BANACH E TEOREMA DELLO "SPECTRAL MAPPING".

Passiamo ora a un problema connesso con la trasformata di Gelfand: uno dei risultati di tale teoria è che potremo stabilire un isomorfismo tra elementi di una C^*-algebra commutativa con identità e l'algebra delle funzioni continue complesse di un certo spazio topologico compatto; se $\mathfrak{A}$ è una generale algebra di Banach con identità, quali funzioni possiamo "calcolare" sugli elementi di $\mathfrak{A}$? Sappiamo dare un significato a polinomi di un elemento di $\mathfrak{A}$ e, relativamente agli elementi invertibili, alla funzione inversa; più in generale sappiamo calcolare la funzione risolvente $R(\lambda)$, quando λ non appartiene allo spettro dell'elemento. Il seguente integrale di Dunford-Pettis ci permetterà di calcolare certe funzioni analitiche di un elemento nel seguente modo. Sia A un elemento dell'algebra di Banach con identità $\mathfrak{A}$, sia $\mathcal{D}$ un compatto chiuso del piano complesso tale che

a) $\sigma(A) \subset \mathcal{D}^\circ$ ($\mathcal{D}^\circ$ = parte interna di $\mathcal{D}$),

b) $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ è una curva regolare, e sia $\Omega(\Gamma) = \Omega_A(\Gamma)$ l'insieme delle funzioni $\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ continue su $\mathcal{D}$ e analitiche in $\mathcal{D}^\circ$; naturalmente $\Omega(\Gamma)$ è una sottoalgebra di Banach di $C(\mathcal{D})$, quando si ponga per $f \in \Omega(\Gamma)$

$$\| f \|_{\Omega(\Gamma)} = \max_{z \in \mathcal{D}} |f(z)| = \max_{t \in \Gamma} |f(t)| .$$

Dato che se $f \in \Omega(\Gamma)$ vale la formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\, dt, \qquad z \in \mathcal{D}^\circ$$

è naturale porre

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda , \quad f \in \Omega(\Gamma); \tag{7.3}$$

segue che l'elemento $f(A) \in \mathfrak{A}$ non dipende dalla scelta di Γ perché $f(\lambda) R_A(\lambda)$ è una funzione analitica in $\mathcal{D}^\circ$ e quindi è applicabile la prima formula integrale di Cauchy.

7.17. TEOREMA

SIA A UN ELEMENTO DELL'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA' $\mathfrak{A}$. L'APPLICAZIONE $f \in \Omega_A(\Gamma) \longrightarrow f(A) \in \mathfrak{A}$ DEFINITA DALLA (7.3) E' UN OMOMORFISMO CONTINUO TALE CHE

1. SE $f(z) = 1$, $z \in \mathrm{int}(\Gamma)$, ALLORA $f(A) = I$
2. SE $f(z) = z$, $z \in \mathrm{int}(\Gamma)$, ALLORA $f(A) = A$
3. SE $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, LA SERIE ESSENDO ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE IN $\mathrm{int}(\Gamma)$, ALLORA $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$

OVE ABBIAMO INDICATO CON $int(\Gamma)$ LA REGIONE RACCHIUSA DA Γ.

Dim.

Chiaramente $f \in \Omega(\Gamma) \to f(A) \in \mathcal{O}l$ è una applicazione lineare e limitata giacché

$$(7.4) \qquad \| f(A) \| \leq \frac{1}{2\pi} |\Gamma| \max \| R(\lambda) \| \cdot \| f \|_{\Omega(\Gamma)} = C_\Gamma \| f \|_{\Omega(\Gamma)}$$

Come segue dalla (7.3) quando si denoti con $|\Gamma|$ la lunghezza di Γ e si ponga $C_\Gamma = \frac{1}{2\pi} |\Gamma| \max\limits_{\lambda \in \Gamma} \| R(\lambda) \|$. Inoltre l'applicazione $f \to f(A)$ è un omomorfismo: dimostriamo più in generale che se $f_1 \in \Omega(\Gamma_1)$ e $f_2 \in \Omega(\Gamma_2)$ allora $f_1(A) f_2(A) = f_1 f_2(A)$; poiché $f_2(A)$ non dipende dalla scelta di Γ_2 possiamo supporre $\Gamma_2 \subset int(\Gamma_1)$; allora

$$f_1(A) f_2(A) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) R(\lambda_1) d\lambda_1 \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2) R(\lambda_2) d\lambda_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) \frac{R(\lambda_1) - R(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 .$$

ove si è usata la prima identità del risolvente $R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) R(\lambda_1) R(\lambda_2)$; ora la funzione $\lambda_2 \to \frac{f(\lambda_2) R(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}$ è analitica in $int(\Gamma_2)$ e quindi, applicando la prima formula integrale di Cauchy

$$f_1(A) f_2(A) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2) \frac{R(\lambda_1) - R(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_2 d\lambda_1 =$$

$$= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} f_1(\lambda_1) \oint_{\Gamma_2} \frac{f_2(\lambda_2)R(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_2 d\lambda_1$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2)R(\lambda_2)\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_1(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_1\right) d\lambda_2$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} f_2(\lambda_2) f_1(\lambda_2) R(\lambda_2) d\lambda_2$$

$$= f_1 f_2(A).$$

Per verificare la 1 si osservi che, poiché la funzione identicamente uguale ad 1 è una funzione intera, nella definizione di $f(A)$ possiamo scegliere come Γ una circonferenza di raggio arbitrariamente grande; allora se $f \equiv 1$

$$\| f(A) - I \| = \frac{1}{2\pi} \left\| - \oint_{\Gamma} R(\lambda) d\lambda - \oint_{\Gamma} \lambda^{-1} I d\lambda \right\|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\| \oint_{\Gamma} (-R(\lambda) - \lambda^{-1} I) d\lambda \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} ((I - \lambda^{-1} A)^{-1} - I) \frac{d\lambda}{\lambda} \right\|$$

$$\leq \max_{\lambda \in \Gamma} \| (I - \lambda^{-1} A)^{-1} - I \| \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{1}{|\lambda|} d\lambda$$

$$\leq \max_{\lambda \in \Gamma} \frac{\| A \|}{|\lambda| - \| A \|} \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0 ;$$

il punto 2 si ottiene facilmente perché se $f(z) = z$

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda R(\lambda)d\lambda = A + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (A-\lambda I)R(\lambda)d\lambda = A$$

e l'ultima asserzione è una conseguenza diretta di quanto dimostrato.

$\square$

Osserviamo che la continuità della applicazione $f \in \Omega(\Gamma) \to f(A) \in \mathfrak{O}$ è dovuta al fatto che Γ ha una distanza positiva da $\sigma(A)$; poiché $\mathrm{spr}(R(\lambda)) = d(\lambda, \sigma(A))^{-1}$ segue che la costante C_Γ che appare nella (7.4) verifica

$$C_\Gamma \geqslant \frac{|\Gamma|}{2\pi} d(\lambda, \sigma(A))^{-1}$$

e quindi C_Γ tende all'infinito quando Γ si avvicina a $\partial\sigma(A)$.
Nel caso in cui $A \in \mathfrak{O}$ abbia spettro sconnesso, cioè $\sigma(A) = \sigma_1(A) \cup \sigma_2(A)$ con $\sigma_1(A)$ e $\sigma_2(A)$ insiemi compatti non vuoti, possiamo generalizzare il teorema 7.17 considerando l'applicazione

$$(7.5) \qquad f \in \Omega(\Gamma) \to f(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)R(\lambda)d\lambda$$

ove Γ questa volta denota una curva regolare chiusa che abbia $\sigma_1(A)$ al suo interno e $\sigma_2(A)$ al suo esterno, e $\Omega(\Gamma)$ è l'algebra di Banach delle funzioni complesse analitiche in $\mathrm{int}(\Gamma)$ e continue fino al bordo. In tal caso l'applicazione (7.5) è una trasformazione lineare continua moltiplicativa tale

:he

$$f \in \Omega(\Gamma),\ f(z) = 1 \quad \text{se} \quad z \in \sigma(A) \Rightarrow f(A) = P$$

ıve $P = P^2$ è un proiettore continuo che commuta con A e

$$f \in \Omega(\Gamma),\quad f(z) = z \quad \text{se} \quad z \in \sigma(A) \Rightarrow f(A) = AP$$

:on ciò si vede che se $\sigma(A)$ è sconnesso allora $\mathfrak{A}$ possiede un elemento idempotente; quindi esiste una relazione tra una proprietà topologica dello spettro e una proprietà algebrica dell'algebra, che è un caso particolare di quella espressa dal teorema di Shilov (RICKART, pag. 168) : sia $\mathfrak{A}$ un'algebra di Banach abeliana con identità, allora se esiste un sottoinsieme $E \subset \sigma(\mathfrak{A})$ aperto e chiuso, esiste un elemento idempotente $P = P^2$ con trasformata di Gelfand $\hat{P} = \chi_E$ uguale alla funzione caratteristica di E.

Una importante proprietà dell'applicazione $f \rightarrow f(A)$ è espressa nel seguente teorema denominato Spectral Mapping Principle.

7.18. TEOREMA.

SIA $\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA', A UN ELEMENTO DI $\mathfrak{A}$ E Γ UNA CURVA REGOLARE CHE LASCI $\sigma_{\mathfrak{A}}(A)$ AL SUO INTERNO; ALLORA

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(f(A)) = f(\sigma_{\mathfrak{A}}(A))$$

PER OGNI $f \in \Omega_A(\Gamma)$.

<u>Dimostrazione.</u>

Sostituendo $\mathfrak{A}$ con un'algebra abeliana massimale possiamo supporre che $\mathfrak{A}$

sia commutativa. Per ogni $\phi \in \sigma(\mathfrak{A})$

$$\phi(f(A)) = -\frac{1}{2\pi i}\,\phi\left(\oint_{\Gamma} f(\lambda)R(\lambda)d\lambda\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\lambda)}{\phi(A)-\lambda}\,d\lambda = f(\phi(A))$$

che implica la tesi in virtù della proposizione 7.15.

$\square$

<u>Esercizio</u>: Siano $A, \mathfrak{A}, \Gamma$ come nel teorema 7.17 e $f \in \Omega(\Gamma)$. Se g è una funzione analitica in un intorno di $\sigma(f(A))$ allora $g \circ f \in \Omega(\Gamma')$ per una qualche curva regolare chiusa tale che $\sigma(A) \subset \mathrm{int}(\Gamma')$ e

$$(g \circ f)(A) = g(f(A))$$

(YOSIDA, cap VIII, § 7).

<u>Esercizio</u>: Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra di Banach generata da un elemento A e dall'identità. Sia Γ una curva regolare chiusa tale che $\sigma(A) \subset \mathrm{int}(\Gamma)$ e $\varphi : \Omega(\Gamma) \to \mathfrak{A} \to C(\sigma(A))$ l'omomorfismo composizione dell'applicazione $f \to f(A)$ e della trasformata di Gelfand. Il nucleo di φ è $J = \{ f \in \Omega(\Gamma) / f|_{\sigma(A)} = 0\}$. In generale φ non è iniettiva, per esempio nel caso $\sigma(A) = \{0\}$

ma $A \neq 0$

Prima di concludere questo paragrafo vogliamo menzionare come l'integrale di Dunford-Pettis possa generalizzarsi al caso di funzioni analitiche di più variabili in un intorno dello spettro congiunto di più elementi, che commutano tra loro; in altre parole dati n elementi $A_1, \ldots, A_n$ di un'algebra di Banach abeliana e una opportuna funzione analitica di n variabili $f(z_1, \ldots, z_n)$ è possibile definire $f(A_1, \ldots, A_n)$ appartenente all'algebra. Per maggiori dettagli rimandiamo al libro di Bonsall e Duncan, Cap. II.

<u>Note complementari</u>

Si è discusso come in generale <u>non</u> ogni funzione continua sullo spettro $\sigma(\mathfrak{A})$ di un'algebra di Banach commutativa con identità $\mathfrak{A}$ sia la trasformata di Gelfand di un elemento di $\mathfrak{A}$. Ciò indica che in generale $\sigma(\mathfrak{A})$ è "troppo grosso".

Una teoria più dettagliata si ottiene studiando un sottoinsieme notevole di $\sigma(\mathfrak{A})$, il contorno Šilov (Naimark (18); Bonsall-Duncan (1)). Tale teoria è fondamentale nello studio delle funzioni analitiche di molte variabili complesse (si veda il trattato di Hörmander sull'argomento).

Gli sviluppi su accennati mirano a isolare un sottoinsieme di $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ la cui struttura topologica è più intimamente legata alla struttura algebrica di $\mathfrak{A}$. Altri sviluppi mirano a studiare quale parte della struttura topologica globale di $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ si debba ritrovare interamente nella struttura algebrica di $\mathfrak{A}$. Un primo risultato in tal senso è il su citato teorema dell'idempotente di Šilov. Un ulteriore risultato importante riguarda il gruppo degli elementi regolari di $\mathfrak{A}$ munito della topologia indotta, più in particolare il gruppo delle componenti connesse del gruppo predetto. Se $\mathcal{G}_1(\mathfrak{A})$ è tale gruppo delle componenti, il teorema di Arens-Royden (cf. T.W. Gamelin "Uniform Algebras") asserisce che l'omomorfismo di Gelfand induce un <u>isomorfismo</u> tra $\mathcal{G}_1(\mathfrak{A})$ e $\mathcal{G}_1(\mathcal{C}(\mathfrak{S}(\mathfrak{A})))$. Tale teorema è stato esteso da Arens al gruppo $\mathcal{G}_n$ delle componenti connesse del gruppo degli elementi regolari dell'algebra delle matrici n n con elementi in $\mathfrak{A}$. Da tali teoremi si deduce che le caratteristiche topologiche di $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ descritte dalla teoria K (vedi note al par. V.2) si desumono mediante la struttura algebrica di $\mathfrak{A}$.

VII. 3. PERTURBAZIONI DELLO SPETTRO. OPERATORI LINEARI CHIUSI SU UNO SPAZIO DI BANACH: INTEGRALE DI DUNFORD, PERTURBAZIONI E STABILITA' DEGLI INSIEMI SPETTRALI COMPATTI.

In questo paragrafo studieremo prevalentemente proprietà di stabilità dello spettro di un elemento di un'algebra di Banach, o di una parte di esso. Cominciamo con il dimostrare che proiettori vicini in norma hanno lo stesso rango.

7.19. PROPOSIZIONE.

SIA X UNO SPAZIO DI BANACH E $P,Q \in \mathcal{B}(X)$ DUE PROIETTORI. SE $spr(P-Q) < 1$ ESISTE UN OPERATORE LINEARE REGOLARE $U \in \mathcal{B}(X)$ TALE CHE

$$P = U^{-1} Q U .$$

INOLTRE SE X E' UNO SPAZIO DI HILBERT E P E Q SONO AUTOAGGIUNTI POSSIAMO SCEGLIERE U UNITARIO.

<u>Dim</u>.

Per ottenere la prima affermazione basta trovare un operatore regolare $U \in \mathcal{B}(X)$ tale che

$$UPX \subset QX, \qquad U(I-P)X \subset (I-Q)X; \tag{7.6}$$

infatti se la (7.6) è valida allora

$$U^{-1}QUy = U^{-1}U\, y = y \qquad \forall\, y \in PX$$

$$U^{-1}Q\,U\,y = 0 \qquad \forall\, y \in (I-P)X$$

cioè $U^{-1}QU = \bar{P}$. Se definiamo

$$U' = QP+(I-Q)(I-P)$$

$$V' = PQ+(I-P)(I-Q)$$

vediamo che U' verifica la (7.6) con $U=U'$ e V' verifica analoghe relazioni. Risulta

(7.7) $$U'V' = I-(P-Q)^2 = V'U'$$

ove $(P-Q)^2 = R$ e quindi $I-R$ commuta con P e Q come segue da una verifica diretta; possiamo allora cercare di regolarizzare U' e V' in modo da farli diventare l'uno l'inverso dell'altro, pur continuando a verificare la (7.6).

Poiché $P-Q$ ha raggio spettrale minore di 1 anche $\operatorname{spr}R = \operatorname{spr}(P-Q)^2 < 1$ e quindi lo spettro di $I-R$ è contenuto nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0\}$ e possiamo definire tramite l'integrale di Dunford-Pettis l'operatore $(I-R)^{-\frac{1}{2}}$, che commuta con P e Q al pari di R. Posto

$$U = (I-R)^{-\frac{1}{2}}U', \qquad V = (I-R)^{-\frac{1}{2}}V'$$

U e V verificano la (7.6) e

$$UV = VU = I$$

per la (7.7). Se inoltre X è uno spazio di Hilbert e P e Q sono proiettori ortogonali allora $V' = U'^*$ e $R = R^*$ che implica

$$U^* = V = U^{-1}$$

cioè U è unitario. $\square$

Se vogliamo studiare perturbazioni dello spettro dobbiamo introdurre una distanza tra insiemi. Siano S_1 e S_2 due sottoinsiemi del piano complesso; definito

$$\rho(S_1,S_2) = \sup_{x\in S_1} d(x,S_2)$$

vediamo che ρ misura bene quanto S_1 dista da S_2, ma non il viceversa; per esempio se S_1 e S_2 sono insiemi chiusi e S_1 è contenuto strettamente in S_2 allora $\rho(S_1,S_2)=0$, ma $\rho(S_2,S_1)\neq 0$. Per avere una distanza simmetrica introduciamo allora

$$\rho'(S_1,S_2) = \max\left\{ \rho(S_1,S_2),\quad \rho(S_2,S_1) \right\}$$

7.20. TEOREMA

SIA $\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA' E A UN ELEMENTO DI $\mathfrak{A}$. SCELTO $\varepsilon > 0$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE

$$\| B-A \| < \delta \Rightarrow \rho(\sigma(B), \sigma(A)) < \varepsilon$$

PER OGNI $B \in \mathfrak{A}$.

<u>Dim</u>.

Dobbiamo dimostrare che esiste $\delta > 0$ per cui se $B \in \mathfrak{A}$ è tale che $\| B-A \| < \delta$ allora

$$E = \{ \lambda \in \mathbb{C} / d(\lambda, \sigma(A)) \geq \varepsilon \} \subseteq P(A) ;$$

poniamo

$$\delta = (\sup_{\lambda \in E} \| R_A(\lambda) \|)^{-1};$$

è chiaro che δ è positivo; poiché se $\lambda \in E$

$$B-\lambda I = A-\lambda I+B-A = (A-\lambda I)(I+R_A(\lambda)(B-A)),$$

$\| B-A \| < \delta$ implica che $I+R_A(\lambda)(B-A)$ è invertibile e quindi $\lambda \in P(B)$, cioé $E \subseteq P(B)$.

$\square$

Il precedente teorema afferma che lo spettro di un elemento di un'algebra di Banach è una funzione semicontinua superiormente, cioé per piccole perturbazioni non si può espandere di molto; <u>lo spettro è però una funzione discontinua inferiormente</u>, infatti si può contrarre bruscamente come dimostrano i seguenti esem-

i. Vedremo però nel teorema 7.21 che nel caso di algebre di Banach commutative lo spettro è una funzione continua anche inferiormente.

Esempio: Sia $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, $\{\ldots\ldots e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1 \ldots\ldots\}$ una base ortonormale di $\mathcal{H}$ e $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'operatore lineare tale che $A e_n = e_{n-1}$ se $n \neq 0$ e $A e_0 = 0$.

Poiché $\|A\| = 1$ lo spettro di A è contenuto nel disco unitario $\{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| \leq 1\}$; dimostriamo che $\sigma(A)$ è l'intero disco unitario: a tale scopo basta osservare che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$ il vettore

$$x_\lambda \equiv \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^n e_n \in \mathcal{H}$$

è tale che

$$A x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e_{n-1} = \lambda x_\lambda$$

cioè λ è un autovalore per l'autovettore x_λ.

Sia $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'operatore lineare di rango 1 tale che

$$B e_0 = e_{-1}\,.$$

Per ogni $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ l'operatore $A+zB$ è invertibile con inverso determinato dalle relazioni

$$(A+zB)^{-1} e_n = e_{n+1} \quad \text{se } n \neq -1,$$

$$(A+zB)^{-1} e_{-1} = \frac{1}{z} e_0\,.$$

Segue che $(A+zB)^{-1}$ ha raggio spettrale uguale ad 1: infatti poiché

$$(A+zB)^{-n} e_i = e_{i+n} \quad \text{per } i \geq 0, \quad i < -n$$

$$(A+zB)^{-n} e_i = \frac{1}{z} e_{i+n} \quad \text{per} \quad -n \leq i < 0$$

segue $\|(A+zB)^{-n}\| = \max(1, \frac{1}{|z|})$ che implica appunto $spr(A+zB)^{-1}=1$. Lo stesso argomento mostra che $spr(A+zB)=1$ e quindi

$$\sigma(A+zB) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| = 1\}, \quad z \neq 0.$$

Si noti come in questo caso per ogni $z \in \mathbb{C}-\{0\}$, $\rho(\sigma(A+zB), \sigma(A))=0$ ma $\rho(\sigma(A), \sigma(A+zB))=1$. Osserviamo ora che B è un operatore compatto in quanto ha rango 1 ed è continuo; poiché, come abbiamo visto, i punti di accumulazione comuni sia del risolvente che dello spettro appartengono allo spettro essenziale, si ha per $z \neq 0$

$$\{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda|=1\} \subseteq \sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+zB) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda|=1\}$$

cioè lo spettro essenziale di A è la circonferenza unitaria.

<u>Esercizio</u>: Verificare direttamente che

$$\sigma(A+zB) = \sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| = 1\}$$

ve A e B sono gli operatori del precedente esempio e z è un umero complesso. (Usare l'equivalenza unitaria (trasformata di ourier) di A+B con la moltiplicazione per ϑ in $L^2([0,2\pi], d\vartheta)$).

sempio: Sia $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$; esiste un operatore lineare $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ on raggio spettrale non nullo e

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| \leq \mathrm{spr}(A) \}$$

ale che: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con

$$\| B \| < \varepsilon \quad , \qquad \mathrm{spr}(A+B) = 0;$$

er la dimostrazione di ciò rimandiamo al libro di Rickart, App., § 5 p. 282.

'.21.TEOREMA

SIA $\mathfrak{A}$ UN'ALGEBRA DI BANACH CON IDENTITA' E A,B ELEMENTI DI $\mathfrak{A}$ TALI CHE AB=BA; ALLORA

$$\rho'(\sigma(A), \sigma(B)) \leq \mathrm{spr}(A-B) .$$

Dim.

Sia $\lambda \notin P(A)$ e scriviamo come nel teorema 7.20

$$B - \lambda I = (A - \lambda I)(I + R_A(\lambda)(B-A));$$

se AB=BA anche $R_A(\lambda)$ commuta con B-A e

$$spr(R_A(\lambda)(B-A)) \leq spr(R_A(\lambda))\ spr\ (B-A)$$

$$= d(\lambda\ ,\ \sigma(A))^{-1}\ spr\ (B-A);$$

segue che

$$\lambda \in P(A),\quad spr(B-A) < d(\lambda\ ,\ \sigma(A))^{-1} \Rightarrow \lambda \in P(B)$$

cioè $\rho(\sigma(B), \sigma(A)) < spr(B-A)$ e quindi per simmetria.

$$\rho'(\sigma(B), \sigma(A)) < spr(B-A).$$

$\square$

Sia X uno spazio di Banach e A: $\mathcal{D}_A \subset X \to X$ un operatore lineare chiuso. Se A non appartiene a $\mathcal{B}(X)$ è possibile che lo spettro sia l'insieme vuoto o l'intero piano complesso. Un esempio della seconda eventualità è quello di un operatore hermitiano chiuso con indici di difetto entrambi non nulli; esempio di operatore chiuso con spettro vuoto è il seguente.

Esempio.

Sia $\mathcal{H} = L^2([0,1],ds)$ e B l'operatore integrale di Volterra invertibile descritto alla fine del capitolo V; come abbiamo visto

$$spr(B) = 0 , \quad n(B) = \{0\}.$$

Posto $A=B^{-1}$, A è un operatore lineare chiuso di $\mathcal{H}$. Poiché $R_B(\lambda)$ è una funzione analitica in $\mathbb{C}-\{0\}$,

$$\lambda \in \mathbb{C} \longrightarrow (I-\lambda B)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

è una funzione intera; segue che anche

$$\lambda \longrightarrow R_A(\lambda) = B(I-\lambda B)^{-1}$$

è una funzione intera, quindi $\sigma(A) = \emptyset$.

Esercizio: Sia $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ e $\{e_0, e_1, \dots\}$ una base ortonormale di $\mathcal{H}$. L'operatore $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definito da

$$B\, e_{n-1} = \frac{1}{2^n} e_n , \quad n=1,2.....$$

e tale che $\|B\| = \frac{1}{2}$, $spr(B)=0$, $nul(B)=0$.

Verificare ciò e concludere, come nell'esempio precedente, che l'operatore $A=B^{-1}$ ha spettro vuoto.

Supponiamo che A sia un operatore lineare chiuso dello spazio di Banach X in sé e che P(A) sia non vuoto. Come nel caso in cui $A \in \mathcal{B}(X)$ è verificata la prima identità del risolvente

(7.8) $$R(\lambda)-R(\mu) = (\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu), \quad \forall \lambda,\mu \in P(A);$$

infatti poiché $(A-\lambda I)R(\lambda)=I$ e $R(\lambda)(A-\lambda I)=I|\mathcal{D}(A)$

segue

$$R(\lambda)-R(\mu)=R(\mu)(A-\mu I)R(\lambda)-R(\mu)(A-\lambda I)R(\lambda)=$$

$$=(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu).$$

Segue dal lemma sulla stabilità dell'invertibilità 6.5 che la funzione $\lambda\in P(A)\to R(\lambda)$ è continua in norma e quindi per la (7.8)

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda)\Big|_{\lambda=\mu}=\lim_{\lambda\to\mu}\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu}=R(\mu)^2$$

ossia $R(\lambda)$ è una funzione analitica in $P(A)$; diversamente dal caso $A\in\mathcal{B}(X)$, $R(\lambda)$ non si annulla all'infinito e per questa ragione non possiamo usare il teorema di Liouville e dimostrare che $\sigma(A)$ è non vuoto.

<u>Esercizio</u>: Sia $\mathcal{D}$ un sottoinsieme del piano complesso e $\lambda\in\mathcal{D}\longrightarrow R(\lambda)\in\mathcal{B}(X)$, X spazio di Banach, una funzione che verifichi la (7.8). Se esiste $\lambda_0\in\mathcal{D}$ tale che $n(R(\lambda_0))=\{0\}$, allora esiste A, operatore lineare chiuso di X in sé, con $P(A)\supseteq\mathcal{D}$ e $R_A(\lambda)=R(\lambda)$ per $\lambda\in\mathcal{D}$.

Sia X uno spazio di Banach e A_1, A_2 operatori lineari chiusi
X in sé con $P(A_1) \cap P(A_2) \neq \emptyset$ e $\mathcal{D}_{A_1} \supset \mathcal{D}_{A_2}$; l'operatore $(A_1 - \lambda I)\cdot$
$_2(\lambda)$, $\lambda \in P(A_1) \cap P(A_2)$, è ovunque definito e pertanto

$$R_{A_1}(\lambda)(A_1 - \lambda I)R_{A_2}(\lambda) = R_{A_2}(\lambda)$$

$$R_{A_1}(\lambda)(A_2 - \lambda I)R_{A_2}(\lambda) = R_{A_1}(\lambda)$$

e implica

.9) $$R_{A_2}(\lambda) - R_{A_1}(\lambda) = R_{A_1}(\lambda)(A_1 - A_2)R_{A_2}(\lambda).$$

(7.9) è chiamata la <u>seconda identità del risolvente</u>.
Mostriamo ora che anche nel caso di operatori chiusi illimiti lo spettro è in un certo senso semicontinuo superiormente.

22. PROPOSIZIONE
A X UNO SPAZIO DI BANACH, A: $\mathcal{D}_A \subset X \to X$ UN OPERATORE LINEARE IUSO E B UN OPERATORE LINEARE A-LIMITATO DI X IN SE'. PER OGNI SIEME COMPATTO $E \subseteq P(A)$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE

$$E \subseteq P(A+zB) \quad \text{SE } |z| < \delta , \quad z \in \mathbb{C}.$$

m.

$\lambda \in P(A)$, $z \in \mathbb{C}$

$$A + zB - \lambda I = (I + zBR_A(\lambda))(A - \lambda I)$$

ove la relativa limitatezza di B rispetto ad A implica $BR_A(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$; quindi $\lambda \in P(A+zB)$ se $\| zBR_A(\lambda)\| < 1$.
Se $a,b > 0$ sono coefficienti di A-limitatezza per B

$$\|BR_A(\lambda)x\| \leq a\|R_A(\lambda)x\| + b\|AR_A(\lambda)x\|$$

per ogni $x \in X$, che implica

$$\begin{aligned}\|BR_A(\lambda)\| &\leq a\|R_A(\lambda)\| + b\|AR_A(\lambda)\| \\ &= a\|R_A(\lambda)\| + b\|I+\lambda R_A(\lambda)\| .\end{aligned}$$

Poichè $\lambda \in E \to R_A(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$ è una funzione continua e E è compatto .

$$\delta^{-1} = \sup_{\lambda \in E} \|BR_A(\lambda)\| < \infty$$

e con tale scelta per δ segue la tesi. Notiamo anche che per $\lambda \in E$, $|z| < \delta$

$$\|R_{A+zB}(\lambda)\| \leq \left(1-\frac{|z|}{\delta}\right)^{-1} \|R_A(\lambda)\| .$$

$\square$

Se A è un operatore lineare chiuso di uno spazio di Banach è talvolta opportuno includere il punto all'infinito nello spettro di A; per renderci conto di ciò dimostriamo la seguente proposizione.

7.23.PROPOSIZIONE

SIA A UN OPERATORE LINEARE CHIUSO DELLO SPAZIO DI BANACH X IN SE', TALE CHE $\sigma(A)$ SIA UNA PARTE COMPATTA DEL PIANO COMPLESSO. ABBIAMO LA SEGUENTE ALTERNATIVA:

a) $A \in \mathcal{B}(X)$ e $R_A(\lambda)$ E' UNA FUNZIONE ANALITICA E NULLA ALL'INFINITO;

b) $R_A(\lambda)$ HA UNA SINGOLARITA' ESSENZIALE ALL'INFINITO.

Dim.

E' sufficiente mostrare che se $R(\lambda)=R_A(\lambda)$ non ha una singolarità essenziale per $\lambda=\infty$, allora $A\in\mathcal{B}(X)$. Se $R(\lambda)$ non ammette una singolarità essenziale per $\lambda=\infty$, cioè se $R(1/\lambda)$ non ammette una singolarità essenziale per $\lambda=0$, allora $R(\lambda)$ è sviluppabile in serie di Laurent nell'esterno di una circonferenza con uno sviluppo del tipo

$$R(\lambda) = \lambda^K A_K + \lambda^{K-1} A_{K-1} + \dots \qquad K \in \mathbb{Z}$$

per $|\lambda|$ grande, con $A_K, A_{K-1},\ldots \in \mathcal{B}(X)$. Mostriamo che $K\leq -1$.
Se $K\geq 0$ allora dalla formula

$$AR(\lambda) = I+\lambda R(\lambda) = I+\lambda^{K+1}A_K+\lambda^K A_{K-1}+\ldots.$$

vediamo che $\lambda^{-K-1}R(\lambda)\to 0$ e $\lambda^{-K-1}AR(\lambda)\to A_K$ e quindi $A_K=0$ perché A è chiuso, pertanto deve aversi $K\leq -1$.

Abbiamo allora

$$R(\lambda) = \lambda^{-1}A_1+\lambda^{-2}A_2+\ldots\ldots$$

$$AR(\lambda) = I+A_1+\lambda^{-1}A_2+\lambda^{-2}A_3+\ldots\ldots$$

e pertanto $R(\lambda)\to 0$, $AR(\lambda)\to I+A_1$ e la chiudibilità di A implica $A_1=-I$. Segue

$$\lambda R(\lambda)-I = \lambda^{-1}A_2+\lambda^{-2}A_3+\ldots\ldots$$

converge a 0 per cui, ripetendo il ragionamento nella dimostrazione del punto 1 del teorema 7.17, risulta

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R(\lambda)d\lambda = I,$$

ove Γ è una curva regolare che lasci al suo interno $\sigma(A)$.
Poiché A è chiuso possiamo scrivere

$$-A = -AI = \frac{1}{2\pi i} A \oint_\Gamma R(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma AR(\lambda)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\lambda^{-1}A_2 + \lambda^{-2}A_3 + \dots)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}A_2 \in \mathcal{B}(X)$$

cioè A è un operatore limitato. $\square$

La precedente proposizione ci porta a dare una nuova definizione di spettro di un operatore lineare A agente sullo spazio di Banach X: chiameremo $\Sigma(A)$, lo spettro esteso di A, l'insieme delle singolarità di $R_A(\lambda)$. Esplicitamente

$$\Sigma(A) = \sigma(A) \quad \text{se} \quad A \in \mathcal{B}(X)$$

$$\Sigma(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\} \qquad \text{altrimenti.}$$

Con questa definizione di $\Sigma(A)$ possiamo compiere una generalizzazione dell'integrale di Dunford; accenniamo brevemente ad essa perché non vi siamo direttamente interessati in questa sede. Supponiamo che A sia un operatore lineare chiuso dello spazio di Banach X con insieme risolvente P(A) non vuoto. Sia $\lambda_o \in P(A)$, allora

$$\sigma(R(\lambda_o)) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_o} \Big/ \lambda \in \Sigma(A) \right\}.$$

Se f è una funzione ~~complessa~~ analitica in un intorno di $\Sigma(A)$ esiste una funzione φ analitica in un intorno di $\sigma(R(\lambda_0))$ tale che

$$f(\lambda) = \varphi\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0}\right)$$

se λ appartiene a tale intorno; poniamo allora per definizione

$$f(A) = \varphi(R(\lambda_0)).$$

Una tale scelta per f(A) generalizza la definizione di funzione analitica di un operatore limitato e rimane valido lo "spectral mapping principle" come vediamo nelle seguenti proposizioni per le cui dimostrazioni, come per una più dettagliata esposizione dell'argomento in generale, rimandiamo al primo volume del Dunford-Schwartz, cap. VII, § 9.

7.24 PROPOSIZIONE

SIA, COME SOPRA, A UN OPERATORE LINEARE CHIUSO DELLO SPAZIO DI BANACH X CON $P(A)\neq\emptyset$. SE f E' UNA FUNZIONE ANALITICA IN UN INTORNO DI $\Sigma(A)$, LA DEFINIZIONE DATA DI $f(A)=\varphi(R(\lambda_0))$ NON DIPENDE DAL PUNTO $\lambda_0 \in P(A)$. INOLTRE SE Γ E' UNA CURVA REGOLARE TALE CHE $\Sigma(A)\subset \mathrm{int}(\Gamma)$ E f E' ANALITICA IN $\mathrm{int}(\Gamma)$ ALLORA

$$f(A) = f(\infty)I - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(\lambda)R_A(\lambda)d\lambda .$$

7.25 PROPOSIZIONE

Sia A ed f come nella precedente proposizione. Allora

$$\Sigma(f(A)) = \sigma(f(A)) = f(\Sigma(A)).$$

In questa sede siamo interessati al caso in cui lo spettro dell'operatore lineare chiuso A dello spazio di Banach X abbia una componente compatta sconnessa

$$\sigma(A) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \Sigma_1 \text{ compatto}, \quad \Sigma_2 \text{ chiuso}$$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset.$$

Sia Γ una curva regolare chiusa tale che

$$\Sigma_1 \subset \operatorname{int}(\Gamma), \quad \Sigma_2 \subset \operatorname{ext}(\Gamma).$$

Come nel caso in cui $A \in \mathcal{B}(X)$ l'applicazione

$$f \in \Omega(\Gamma) \longrightarrow -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)R_A(\lambda)d\lambda$$

è un omomorfismo continuo di $\Omega(\Gamma)$ in $\mathcal{B}(X)$, più precisa= mente, di $\Omega(\Gamma)$ nell'algebra di Banach commutativa con iden=

tità generata da $R_A(\lambda)$, $\lambda \in P(A)$.

Ma se $\Sigma_1 \neq \sigma(A)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} R_A(\lambda)d\lambda = P$$

è un idempotente diverso dall'identità che commuta con $R_A(\lambda)$, $\lambda \in P(A)$ e

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \lambda R(\lambda)d\lambda = AP \neq A.$$

E' subito visto che la relazione

$$PR(\lambda) = R(\lambda)P, \quad \lambda \in P(A)$$

implica

$$AP \supset PA\,;$$

in questo caso diciamo che il proiettore $P \in \mathcal{B}(X)$ commuta con l'operatore illimitato A e una conseguenza di ciò è che i sottospazi lineari $X_1 = P(X)$ e $X_2 = (I-P)(X)$ sono invarianti perA

$$A(X_1) \subseteq X_1, \qquad A(X_2 \cap \mathcal{D}_A) \subseteq X_2.$$

7.26. TEOREMA

SIA A UN OPERATORE LINEARE CHIUSO DELLO SPAZIO DI BANACH X TALE CHE

$$\Sigma(A) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \qquad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset,$$

OVE Σ_1 E' COMPATTO E Σ_2 E' CHIUSO. SIA Γ UNA CURVA REGOLARE CHIUSA TALE CHE

$$\Sigma_1 \subset \mathrm{int}(\Gamma), \qquad \Sigma_2 \subset \mathrm{ext}(\Gamma) \tag{7.10}$$

e

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} R_A(\lambda)\,d\lambda \quad , \quad X_1 = PX \ , \quad X_2 = (I-P)X.$$

ALLORA LA DECOMPOSIZIONE $X = X_1 \oplus X_2$ RIDUCE A

$$A = A_1 \oplus A_2 \ , \quad A_1 = A\big|_{X_1} \ , \quad A_2 = A\big|_{\mathcal{D}_A \cap X_2}$$

IN MODO TALE CHE

$$\sigma(A_1) = \Sigma(A_1) = \Sigma_1, \qquad \Sigma(A_2) = \Sigma_2.$$

Dim.

Dimostriamo dapprima in generale che se A_i è un operatore lineare chiuso dello spazio di Banach X_i $(i=1,2)$ e $A \equiv A_1 \oplus A_2$ allora

$$\Sigma(A) = \Sigma(A_1) \cup \Sigma(A_2).$$

Infatti se $\lambda \in P(A)$ allora $R_A(\lambda)\big|_{X_i}$ è l'operatore inverso di $(A_i - \lambda I)$ cioè $R_A(\lambda)\big|_{X_i} = R_{A_i}(\lambda)$, dunque $\lambda \in P(A_i)$ e

$$P(A) \subseteq P(A_1) \cap P(A_2).$$

Viceversa $\lambda \in P(A_1) \cap P(A_2)$ implica che $R_A(\lambda)$ esiste e $R_A(\lambda) =$

$= R_{A_1}(\lambda)\oplus R_{A_2}(\lambda)$; segue $P(A_1)\cap P(A_2)\subsetneq P(A)$ e dunque

$$P(A) = P(A_1)\cap P(A_2), \qquad \Sigma(A) = \Sigma(A_1)\cup\Sigma(A_2).$$

Poiché $\Sigma(A)=\Sigma_1\cup\Sigma_2$, se mostriamo che

$$\Sigma(A_1)\subset \mathrm{int}(\Gamma), \qquad \Sigma(A_2)\subset \mathrm{ext}(\Gamma),$$

la (7.10) implicherà $\Sigma(A_1)=\Sigma_1$ e $\Sigma(A_2)=\Sigma_2$.

Ma se $\lambda\in \mathrm{ext}(\Gamma)$ è

$$R_A(\lambda)P = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{R(\lambda)-R(t)}{\lambda-t}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{R(t)}{t-\lambda}dt$$

da cui vediamo che la funzione $\lambda\in P(A)\to R_A(\lambda)P$ ammette una continuazione analitica per $\lambda\in \mathrm{ext}(\Gamma)$, quindi anche $R_{A_1}(\lambda)=$ $=R_A(\lambda)P|_{X_1}$ ammette una continuazione analitica all'esterno di Γ che implica

$$\Sigma(A_1)\subsetneq \mathrm{int}(\Gamma).$$

Analogamente si ha

$$R_A(\lambda)(I-P)= -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{R(t)}{t-\lambda}dt \quad \text{se} \quad \lambda\in \mathrm{int}(\Gamma)$$

per cui $R_{A_2}(\lambda) = R_A(\lambda)(I-P)|_{X_2}$ ammette una continuazione analitica in $\mathrm{int}(\Gamma)$ e

$$\Sigma(A_2) \subseteq ext(\Gamma).$$

Poiché A_1 è ovunque definito in X_1, segue $A_1 \in \mathcal{B}(X_1)$ e $\sigma(A_1)=$ $=\Sigma(A_1)$, che completa la dimostrazione.

□

7.27.COROLLARIO

SIA A UN OPERATORE LINEARE CHIUSO DELLO SPAZIO DI BANACH X E $\lambda \in \sigma(A)$ UN PUNTO ISOLATO DELLO SPETTRO DI A TALE CHE

$$\dim P_A(\{\lambda\})X < \infty$$

OVE $P_A(\{\lambda\})=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R(t)dt$, Γ CIRCONFERENZA DI CENTRO λ CHE LASCIA AL SUO ESTERNO IL RESTO DELLO SPETTRO. ALLORA

$$\mathrm{nul}(A-\lambda I) = \mathrm{nul}(A'-\lambda I)$$

CIOE' λ E' UN AUTOVALORE CON LA STESSA MOLTEPLICITA' PER A E PER L'OPERATORE TRASPOSTO A'.

<u>Dim</u>.

Poiché l'applicazione $T \in \mathcal{B}(X) \rightarrow T' \in \mathcal{B}(X^*)$ è una isometria tra spazi di Banach

$$P_A(\{\lambda\})' = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_A(t)'dt = -\frac{1}{2\pi i}\oint R_{A'}(t)dt = P_{A'}(\{\lambda\})$$

cioè il trasporto del proiettore relativo all'operatore A e al punto λ è uguale al proiettore relativo all'operatore A' e al punto λ ($\sigma(A)=\sigma(A')$ è quindi λ è un punto isolato dello spettro di A'). E' facile verificare che l'applicazione

$$f\in P'(X^*) \longrightarrow f|_{P(X)}\in P(X)^* .$$

stabilisce una isometria lineare tra gli spazi di Banach $P'(X^*)$ e $P(X)^*$ e pertanto

$$\dim P_A(\{\lambda\}) = \dim P_{A'}(\{\lambda\}) < \infty .$$

Se $A_1 = A|_{P(X)}$, l'operatore $A'|_{P'(X^*)}$ si identifica con l'operatore A_1' e quindi, in virtù del teorema precedente, il corollario si riduce a un problema di dimensione finita perché

$$n(A-\lambda I) = n(A_1-\lambda I)$$

$$n(A'-\lambda I) = n(A_1'-\lambda I).$$

Segue dalla teoria dei sistemi di equazioni lineari che le equazioni

$$A_1 x = \lambda x, \qquad x\in P(X),$$

$$A_1' x' = \lambda x', \qquad x\in P(X)^*,$$

ammettono lo stesso numero di soluzioni linearmente indipendenti e quindi otteniamo la tesi.

$\square$

Abbiamo visto nel teorema 7.20 che lo spettro di un elemento di un'algebra di Banach non si può espandere bruscamente per piccole perturbazioni dell'elemento. Vogliamo ora generalizzare questo risultato per quanto riguarda le parti compatte e isolate dello spettro di un operatore lineare chiuso di uno spazio di Banach.

Se A è un operatore lineare chiuso di uno spazio di Banach e Σ_1 è una parte compatta isolata di $\Sigma(A)$ porremo

$$P_A(\Sigma_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} R_A(\lambda)d\lambda$$

ove Γ è una curva regolare chiusa che lasci al suo interno Σ_1 e al suo esterno il resto dello spettro.

7.28 TEOREMA

SIA X UNO SPAZIO DI BANACH E A UN OPERATORE LINEARE CHIUSO DI X IN SE' TALE CHE LO SPETTRO SIA L'UNIONF DISGIUNTA

$$\Sigma(A) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

DELL'INSIEME COMPATTO Σ_1 E DELL'INSIEME CHIUSO Σ_2. SCEGLIAMO UNA CURVA REGOLARE CHIUSA Γ TALE CHE

$$\Sigma_1 \subset \operatorname{int}(\Gamma) \,, \qquad \Sigma_2 \subset \operatorname{ext}(\Gamma).$$

PER OGNI FISSATO OPERATORE LINEARE B DI X IN SE' A-LIMITATO, ESISTE $\delta_1 > 0$ TALE CHE PER $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \delta_1$, A+zB E' UN OPERATORE CHIUSO E

$$\Sigma(A+zB) = \Sigma_1(z) \cup \Sigma_2(z)$$
$$\Sigma_1(z) \subseteq \operatorname{int}(\Gamma) \,, \quad \Sigma_2(z) \subseteq \operatorname{ext}(\Gamma)$$

ED INOLTRE ESISTE UN OPERATORE REGOLARE $U_z \in \mathcal{B}(X)$ TALE CHE

$$P(z) = P_{A+zB}(\Sigma_1(z)) = U_z P_A(\Sigma_1) U_z^{-1}.$$

Dim.

Sia $\delta^{-1} = \sup_{\lambda\in\Gamma} \|BR_A(\lambda)\|$. Se $|z| < \delta$ allora per la proposizione 7.22 si ha $\Gamma \subset P(A+zB)$ e

$$\|R_{A+zB}(\lambda)\| \leq (1-\frac{|z|}{\delta})^{-1} \|R_A(\lambda)\| \,, \qquad \lambda \in \Gamma.$$

Allora

$$P(z)-P(o) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (R_A(\lambda)-R_{A+zB}(\lambda))d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma zR_{A+zB}(\lambda)BR_A(\lambda)d\lambda$$

ove, nell'ultimo passaggio, abbiamo potuto applicare la seconda identità del risolvente essendo $\mathcal{D}_{A+zB}=\mathcal{D}_A$. Segue

$$\| P(z)-P(o)\| \leq \frac{|z|}{\delta-|z|}\, C_\Gamma$$

con $C_\Gamma = \frac{1}{2\pi}|\Gamma| \max_{\lambda\in\Gamma} \|R_A(\lambda)\|$ costante dipendente solo da Γ ed A. Posto allora $\delta_1=\frac{\delta}{1+C_\Gamma}$ si ha

$$\| P(z)-P(o)\| < 1 \qquad \text{se} \quad |z|<\delta_1$$

e quindi per la proposizione 7.19 esiste un operatore regolare $U_z\in\mathcal{B}(X)$ tale che

$$P(z) = U_z P(o)\, U_z^{-1} \, .$$

$\square$

NOTA: Supponiamo nel precedente teorema che Σ_1 si riduca ad un punto $\lambda_\circ$ e che $P_A(\{\lambda_\circ\})X$ abbia dimensione finita $n<\infty$. Segue che per $|z|<\delta_1$ esistono al più n autovalori di (A+zB) eventualmente coincidenti $\{\lambda_1(z),\ldots,\lambda_m(z)\}$, $1\leq m\leq n$, funzioni continue di z tali che $\lambda_i(0)=\lambda_\circ$, $(i=1,\ldots,m)$.

C^*- ALGEBRE E TEORIA SPETTRALE

Il precedente capitolo è stato dedicato in buona parte allo studio delle algebre di Banach commutative; vogliamo ora studiare la struttura di una classe ristretta, ma molto importante di Algebre di Banach, cioè le C^*-algebre commutative. Ricordiamo che un'algebra di Banach $\mathfrak{A}$ è una C^*-algebra se esiste una involuzione $A\in\mathfrak{A}\to A^*\in\mathfrak{A}$ tale che

(a) $(\alpha A + B)^* = \bar{\alpha} A^* + B^*$, cioè è antilineare

(b) $(AB)^* = B^*A^*$

(c) $\| A^*A \| = \| A \|^2$

per ogni $\alpha\in\mathbb{C}$ e $A,B\in\mathfrak{A}$.

Segue con facilità dagli assiomi (a) e (b) che se $\mathfrak{A}$ possiede una identità I, essa è necessariamente autoaggiunta, cioè $I^* = I$, mentre l'ulteriore proprietà C^* della norma (c) implica che $\| I \| = 1$, eccetto nel caso banale $\mathfrak{A} = \{o\}$. Non evidente è l'asserzione che ogni C^*-algebra può essere immersa in una C^*-algebra con identità; per verificare ciò consideriamo la rappresentazione regolare sinistra della C^*-algebra $\mathfrak{A}$, cioè l'omomorfismo π di $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{B}(\mathfrak{A})$ definito da

$$\pi (A)\ B = AB\ , \qquad A,B \in \mathfrak{A}.$$

Come conseguenza della proprietà C^* della norma, π è un isomorfismo isometrico, quindi possiamo trasportare l'involuzione in $\pi(\mathfrak{A})$ definendo

$$\pi (A)^* = \pi (A^*);$$

Poichè $\mathcal{B}(\mathfrak{A})$ possiede un'identità I possiamo considerare la sottoalgebra $\mathcal{B}$ ... $(\mathfrak{A})$ generata da $\mathfrak{A} \equiv \pi(\mathfrak{A})$ e da I

$$\mathcal{B} = \{ A + \lambda I \,/\, A \in \mathfrak{A},\ \lambda \in \mathbb{C} \} \subset \mathcal{B}(\mathfrak{A}).$$

...chiaro che $\mathcal{B}$ è un'algebra di Banach e che l'involuzione

$$A + \lambda I \longrightarrow A^{*} + \bar{\lambda} I$$

...ifica gli assiomi (a) e (b). Ma, per ogni $A + \lambda I \in \mathcal{B}$

$$\| A + \lambda I \|^2 = \sup \{ \| (A + \lambda I) B \|^2 \,/\, B \in \mathfrak{A},\ \|B\| \leq 1 \}$$

$$= \sup \{ \| B^{*}(A + \bar{\lambda} I)\,(A + \lambda I) B \| \,/\, B \in \mathfrak{A},\ \|B\| \leq 1 \}$$

$$\leq \sup \{ \| (A^{*} + \bar{\lambda} I)\,(A + \lambda I) B \| \,/\, B \in \mathfrak{A},\ \|B\| \leq 1 \}$$

$$= \| (A^{*} + \bar{\lambda} I)\,(A + \lambda I) \|$$

...è $\mathcal{B}$ è una C^{*}-algebra con identità contenente $\mathfrak{A}$.

Per quanto visto possiamo restringere la nostra attenzione alle C^{*}-algebre con ...ntità.

II § 1 PRIME PROPRIETA'; C^{*}- ALGEBRE COMMUTATIVE, TEOREMA DI GELFAND-NAIMARK.

Un classico esempio di C^{*}-algebra commutativa con identità è dato dall'alge...a $\mathcal{C}(X)$ di tutte le funzioni continue complesse di uno spazio topologico compat... X con la norma del massimo e il passaggio alla funzione complessa coniugata co... involuzione; quello che ci accingiamo a dimostrare è che così si ottiene ogni ...-algebra commutativa con identità; infatti, come abbiamo accennato, la trasfor mazione di Gelfand di una C^*-algebra commutativa con identità $\mathfrak{A}$ realizza uno *isomorfismo isometrico di $\mathfrak{A}$ su $\mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}))$.

8.1 LEMMA

SIA $\mathfrak{A}$ UNA C^*-ALGEBRA E $A \in \mathfrak{A}$ UN ELEMENTO NORMALE, CIOE' $A^*A = AA^*$; ALLORA $\|A\| =$ spr (A).

Dim.

Supponiamo dapprima che $A = A^*$, cioè A è autoaggiunto; in tal caso segue dalla proprietà C^* della norma

$$\|A\|^2 = \|A^2\|$$

e quindi per induzione

$$\|A\|^n = \|A^n\| \qquad \text{se } n = 2^p,\ p \in \mathbb{N}. \tag{8.1}$$

Se ora A è un generico elemento di $\mathfrak{A}$, A^*A è un elemento autoaggiunto e quindi, supposto A <u>normale</u> otteniamo

$$\|A\|^{2n} = \|A^*A\|^n = \|(A^*A)^n\| = \|(A^n)^*A^n\| = \|A^n\|^2$$

per ogni $n = 2^p$ e p intero, ossia la (8.1) rimane valida se A è un generico elemento normale. Segue

$$\text{spr}(A) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n = 2^p}} \|A^n\|^{1/n} = \|A\|.$$

$\square$

8.2 LEMMA

SIA $\mathfrak{A}$ UNA C^*-ALGEBRA COMMUTATIVA CON IDENTITA'; SE $A = A^*$ E' UN ELEMENTO AUTOAGGIUNTO DI $\mathfrak{A}$, ALLORA LO SPETTRO DI A E' REALE.

Dim.

Per definizione di spettro, è

$$\sigma(A+\alpha I) = \sigma(A) + \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{C},$$

e poichè $A + \alpha I$ è autoaggiunto al pari di A quando α è reale, basta dimostrare che lo spettro di un elemento autoaggiunto non può contenere numeri immaginari puri non nulli. Supponiamo al contrario A autoaggiunto e $i\beta \in \sigma(A)$, $\beta \in \mathbb{R}$; segue

$$i(\beta+\lambda) \in \sigma(A + i\lambda I), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e pertanto

$$(\beta+\lambda)^2 \leq \| A + i\lambda I \|^2 = \| (A + i\lambda I)^* (A + i\lambda I) \| =$$

$$\| A^2 + \lambda^2 I \| \leq \| A \|^2 + \lambda^2 ,$$

cioè ancora

$$\beta^2 + 2\lambda\beta \leq \| A \|^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

che ovviamente implica $\beta = 0$. $\square$

Più in generale, anche nelle C^*-algebre non commutative, ogni ideale bilatero chiuso è autoaggiunto, v. [2].

8.3 TEOREMA DI GELFAND - NAIMARK

SIA $\mathfrak{A}$ UNA C^*-ALGEBRA COMMUTATIVA CON IDENTITA'. ESISTE UNO SPAZIO TOPOLOGICO COMPATTO DI HAUSDORFF X ED UNO *ISOMORFISMO ISOMETRICO DI $\mathfrak{A}$ SU $\mathcal{C}(X)$: PRECISAMENTE SI HA $X = \sigma(\mathfrak{A})$ E LO *ISOMORFISMO E' DATO DALLA TRASFORMATA DI GELFAND.

Dim.

Sappiamo che la trasformazione di Gelfand

$$A \in \mathfrak{A} \rightarrow \hat{A} \in \mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}))\quad .$$

é, in generale, un omorfismo di $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}))$; poichè $\mathfrak{A}$ è una C^*-algebra commutativa ogni elemento $A \in \mathfrak{A}$ è normale e quindi segue dal lemma 8.1

$$\| \hat{A} \| = \sup_{\phi \in \sigma(\mathfrak{A})} |\phi(A)| = \mathrm{spr}(A) = \| A \| \quad .$$

cioè la trasformazione $A \rightarrow \hat{A}$ è un isometria ed è pertanto iniettiva.

Notiamo che ogni elemento $A \in \mathfrak{A}$ può scriversi come

$$A = A_1 + i A_2 , \qquad A_1 = \frac{A + A^*}{2} , \quad A_2 = \frac{A - A^*}{2i}$$

ove A_1 e A_2 sono elementi autoaggiunti di $\mathfrak{A}$; segue allora dal lemma 8.2 che per ogni $\phi \in \sigma(\mathfrak{A})$

cioè

$$\widehat{A^*}(\phi) = \overline{\hat{A}\ (\phi)}\ ,\quad \phi \in \sigma(\mathfrak{A})$$

ossia $A \to \hat{A}$ conserva l'involuzione ed è pertanto uno *isomorfismo.

Rimane da dimostrare la suriettività della trasformazione: poichè $A \to \hat{A}$ è una i sometria, essa ha codominio $\mathfrak{A}^\wedge$ chiuso in $\mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}))$, quindi dobbiamo mostrare so lo che $\mathfrak{A}^\wedge$ è densa in $\mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}))$; d'altra parte ciò è una diretta conseguenza del teorema di Stone-Weierstrass perchè $\mathfrak{A}^\wedge$ è una *sottoalgebra con identità di $\mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}))$, che separa i punti perchè, per definizione, se $\phi_1, \phi_2 \in \sigma(\mathfrak{A})$ e $\phi_1 \neq \phi_2$, esi ste $A \in \mathfrak{A}$ tale che $\phi_1(A) \neq \phi_2(A)$.

$\square$

8.4 COROLLARIO

SIA $\mathfrak{A}$ UNA C^*-ALGEBRA COMMUTATIVA. $\mathfrak{A}$ E' ISOMETRICAMENTE *ISOMORFA ALLA C^*-ALGEBRA $\mathcal{C}_0$ (X) DELLE FUNZIONI COMPLESSE CONTINUE NULLE ALL'INFINITO DI UNO SPAZIO TOPOLO GICO LOCALMENTE COMPATTO DI HAUSDORFF X.

Dim.

Sia $\mathcal{B}$ la C^*-algebra ottenuta da $\mathfrak{A}$ mediante l'aggiunzione dell'identità I.

$$\mathcal{B} = \{ A + \lambda I \ / \ A \in \mathfrak{A},\ \lambda \in \mathbb{C} \}.$$

$\mathcal{B}$ è una C^*-algebra commutativa con identità e quindi, per il teorema di Gelfand-Nai mark, $\mathcal{B}$ è isomorfa a $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{B}))$.

Sia $\phi \in \sigma(\mathcal{B})$ l'omomorfismo

$$\phi : A + \lambda I \in \mathcal{B} \to \lambda \in \mathbb{C},$$

è la sottoalgebra di $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{B}))$ costituita da tutte le funzioni che si annullano in ϕ.

Posto $X = \sigma(\mathcal{B}) - \phi$; X è uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff e la trasformazione

$$A \in \mathfrak{A} \to \hat{A}\big|_X$$

realizza il desiderato *isomorfismo di $\mathfrak{A}$ su $\mathcal{C}_0(X)$.

$\square$

Il teorema di Gelfand-Naimark ha molte importanti conseguenze e questo capitolo ne sarà una illustrazione.

E' chiaro che lo spettro di un'algebra di Banach commutativa con identità è un invariante per isomorfismi, cioè algebre di Banach commutative con identità isomorfe hanno spettri omeomorfi; nel caso di C^*-algebre commutative con identità lo spettro è un <u>invariante completo</u> per isomorfismi, cioè determina l'algebra. Infatti se $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ sono C^*-algebre commutative con identità e $\psi : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ è un isomorfismo di $\mathfrak{A}_1$ su $\mathfrak{A}_2$, allora l'applicazione ψ'

$$\phi \in \sigma(\mathfrak{A}_2) \xrightarrow{\psi'} \phi \circ \psi \in \sigma(\mathfrak{A}_1)$$

è continua perchè le funzioni $\hat{A}$, $A \in \mathfrak{A}_1$, che definiscono la topologia di $\sigma(\mathfrak{A}_1)$ come una topologia debole, sono trasformate da $\hat{A} \to \hat{A} \circ \psi' = \widehat{\psi(A)}$ in un sottoinsieme delle funzioni che definiscono la topologia di $\sigma(\mathfrak{A}_2)$; l'inverso ψ'^{-1} di ψ' è analogamente definito ed è continuo, pertanto ψ' è un omeomorfismo. Viceversa se ψ' è un omeomorfismo di $\sigma(\mathfrak{A}_2)$ su $\sigma(\mathfrak{A}_1)$, allora

$$f \in \mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}_1)) \longrightarrow \psi(f) = f \circ \psi' \in \mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}_2))$$

è un isomorfismo di $\mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}_1))$ su $\mathcal{C}(\sigma(\mathfrak{A}_2))$.

Si noti che, poichè ogni isomorfismo $\psi : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ si ottiene "trasponendo" l'omeomorfismo $\psi' : \sigma(\mathfrak{A}_2) \to \sigma(\mathfrak{A}_1)$, ogni isomorfismo tra C^*-algebre commutative con identità conserva l'involuzione ed è pertanto uno *isomorfismo: tale proprietà non è però più valida per le C^*-algebre non commutative.

Analogamente a quanto fatto possiamo associare ad ogni omomorfismo di $\mathfrak{A}_1$ in $\mathfrak{A}_2$, con $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ C^*-algebre commutative con identità, una applicazione continua di $\sigma(\mathfrak{A}_2)$ in $\sigma(\mathfrak{A}_1)$ (e viceversa ad ogni applicazione continua di $\sigma(\mathfrak{A}_2)$ in $\sigma(\mathfrak{A}_1)$ un omomorfismo di $\mathfrak{A}_1$ in $\mathfrak{A}_2$): la corrispondenza così stabilita è un funtore controvariante della categoria delle C^*-algebre commutative con identità sulla categoria degli spazi topologici compatti di Hausdorff.

8.5 COROLLARIO

SE $\mathfrak{A}$ UNA C^*-ALGEBRA COMMUTATIVA CON IDENTITA' E ψ E' UNO *ISOMORFISMO DI $\mathfrak{A}$ NELLA C^*-ALGEBRA $\mathfrak{B}$, ALLORA ψ E' ISOMETRICO.

Dim.

Basta supporre $\mathfrak{B} = \overline{\psi(\mathfrak{A})}$ e quindi $\mathfrak{B}$ è commutativa con identità $\psi(I)$.
Sia X lo spettro di $\mathfrak{A}$ e Y lo spettro di $\mathfrak{B}$. Come abbiamo visto l'applicazione

$$\psi' : \phi \in Y \longrightarrow \phi \circ \psi \in X$$

è continua; come dalla compattezza di Y che ...

Identificando $\mathcal{A}$ con $C(X)$ e $\mathcal{B}$ con $C(Y)$ è

$$\psi : \hat{A} \in C(X) \longrightarrow \hat{A} \circ \psi' \in C(Y);$$

segue che ψ è isometrico se ψ' è surgettivo. D'altra parte se ciò non fosse, cioè se $\psi'(Y) \neq X$, essendo X uno spazio topologico normale, esisterebbe

$$\hat{A} \in C(X),\ \hat{A} \neq 0 \text{ e } \hat{A}\big|_{\psi'(Y)} = 0,$$

ma allora

$$\phi \circ \psi(A) = 0, \quad \forall \phi \in \sigma(\mathcal{A}),$$

cioè $\psi(A) = 0$ e ψ non sarebbe iniettivo. □

NOTA: Nel corollario precedente ψ ha codominio chiuso, essendo ψ isometrico. Ciò ci permette di giustificare un risultato usato nell'esposizione degli operatori di Toeplitz (cap.VI, § 2): là avevamo la circonferenza unitaria T, uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e un isomorfismo ψ

$$\mathcal{A} = C(T) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$$

ed abbiamo affermato che il codominio di ψ era una C^*-algebra.

8.6 COROLLARIO

SIANO $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ C^*-ALGEBRE E $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ UNO *ISOMORFISMO. ALLORA $\psi(\mathcal{A})$ E' CHIUSA E ψ

m.

ssiamo assumere che $\mathfrak{A}$ abbia un'identità, aggiungendola altrimenti.

a $\mathcal{A}$ la C^*-algebra con identità generata dall'elemento normale $A \in \mathfrak{A}$; $\mathcal{A}$ è com
ıtativa essendo la chiusura uniforme dei polinomi in A, A^*, I; applicando il corol
rio precedente vediamo che $\psi/_{\mathcal{A}}$ è isometrico e quindi

$$\| \psi(A) \| = \| A \| .$$

a ora A un generico elemento di $\mathfrak{A}$; poichè $A^* A$ è autoaggiunto, quindi normale,

$$\| \psi(A) \|^2 = \| \psi(A)^* \psi(A) \| = \| \psi(A^* A) \| = \| A^* A \| = \| A \|^2 .$$

uindi ψ è isometrico e $\psi(\mathfrak{A})$ è chiusa.

$\square$

)TA: come già detto si può dimostrare (J. DIXMIER (2), proposizione 1.8.2) che se
è un ideale bilatero chiuso di una C^*-algebra $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}/_J$ è una C^*-algebra. Segue
ıe se $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sono C^*-algebre e $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ uno *omomorfismo, $\psi(\mathfrak{A})$ è chiuso,
ioè l'immagine di $\mathfrak{A}$ attraverso ψ è una C^*-algebra. Infatti, posto J = n (ψ),
ɜtta η l'applicazione quoziente di $\mathfrak{A}$ modulo J, esiste uno *isomorfismo ψ_0 di $\mathfrak{A}/_J$
ı $\mathfrak{B}$ tale che

$$\psi = \psi_0 \cdot \eta$$

per il corollario 8.6 $\psi(\mathfrak{A}) = \psi_0(\mathfrak{A}/_J)$ è chiusa.

<u>sservazione</u>: Sia $\mathfrak{A}$ una C^*-algebra con identità e $A \in \mathfrak{A}$ un elemento normale; se
$\in \mathbb{C}$, $A - \lambda I$ è normale e se inoltre $\lambda \in P(A)$ anche $(A - \lambda I)^{-1}$ è normale co
: segue facilmente dalla relazione $B^{*-1} = B^{-1*}$, ove B è un elemento invertibile di $\mathfrak{A}$.

Segue la relazione

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| = \mathrm{spr}\,(R(\lambda)) = d(\lambda,\sigma(A))^{-1}.$$

Se $A = A^*$ è un operatore lineare autoaggiunto (non limitato) dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e $\lambda \in P(A)$, allora $(A-\lambda I)^{-1}$ è normale in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e

$$\gamma(A-\lambda I) = d(\lambda,\sigma(A)).$$

In particolare se $\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R} \subset P(A)$

$$\gamma(A-\lambda I) \geq |\mathrm{Im}\,\lambda| .$$

Siano ora $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ due algebre di Banach tali che $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ ed aventi la stessa identità I. Se $A \in \mathfrak{A}_1$ è

$$\sigma_{\mathfrak{A}_1}(A) \supset \sigma_{\mathfrak{A}_2}(A).$$

Inoltre abbiamo dimostrato nel capitolo precedente che $P_{\mathfrak{A}_{min}}(A)$, l'insieme risolvente di A relativo all'algebra di Banach con identità generata da A, è la componente connessa al punto all'infinito del risolvente di A relativo ad algebre di Banach più grandi. Dunque se $P_{\mathfrak{A}_1}(A)$ è connesso è

$$\sigma_{\mathfrak{A}_1}(A) = \sigma_{\mathfrak{A}_2}(A).$$

Ciò implica il seguente teorema.

8.7 TEORÈMA

SIA $\mathfrak{A}$ UNA C^*-ALGEBRA CON IDENTITA', $A \in \mathfrak{A}$ E $\mathcal{A}$ LA C^*-SOTTOALGEBRA GENERATA DA A, A^*, I.

ALLORA

$$\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\mathfrak{A}}(A).$$

Dim.

Supponiamo dapprima che A sia autoaggiunto; per il lemma 8.2 $\sigma(A)$ è reale, dunque $\rho(A)$ è connesso ($\sigma(A)$ è compatto) e

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A).$$

Sia ora A arbitrario; scegliamo un numero λ appartenente al risolvente di A in $\mathfrak{A}$ e poniamo

$$B = A - \lambda I.$$

Poichè $B^* B$ è autoaggiunto e invertibile

$$(B^* B)^{-1} = B^{-1} B^{*-1} \in \mathcal{A},$$

quindi

$$B^{-1} = (B^* B)^{-1} B^* \in \mathcal{A}$$

8.8 COROLLARIO

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE NORMALE; SE $\mathcal{A}$ E' LA C^*-ALGEBRA GENERATA DA A E DALL'IDENTITA', ALLORA

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A) \text{ E' OMEOMORFO A } \sigma(\mathcal{A}),$$

$$\mathcal{A} \text{ E'}{}^* \text{ISOMORFA A } \mathcal{C}(\sigma(A)).$$

Dim.

Per il teorema di Gelfand-Naimark e per il precedente teorema è sufficiente dimostrare la prima asserzione. Analogamente a quanto visto nel caso di un'algebra di Banach generata da un elemento, l'applicazione

$$\phi \in \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \phi(A) \in \sigma_{\mathcal{A}}(A)$$

è un omeomeorfismo di $\sigma(\mathcal{A})$ su $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$: infatti essa è continua per definizione, iniettiva perchè A è un generatore e surgettiva per costruzione; poichè $\sigma(A)$ e $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ sono spazi compatti di Hausdorff anche l'inversa è continua.

$\square$

Identificando $\sigma(A)$ con $\sigma(\mathcal{A})$ nel precedente teorema possiamo costruire uno *isomorfismo di $\mathcal{C}(\sigma(A))$ su $\mathcal{A}$ definito come antitrasformazione di Gelfand di $\mathcal{A}$:

$$f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \to f(A) \in \mathcal{A}, \qquad \widehat{f(A)} = f.$$

ienamente giustificata perchè generalizza quella di p (A) nel caso in cui $p(\lambda)$ ia un polinomio e di A^{-1} quando λ^{-1} sia la funzione inversa.

Inoltre lo *isomorfismo $f \longrightarrow f(A)$ è unico quando si ponga la condizione

$$g_1(A) = A \quad \text{se} \quad g_1 : \lambda \in \sigma(A) \longrightarrow \lambda \in \mathbb{C},$$

$$g_2(A) = I \quad \text{se} \quad g_2 : \lambda \in \sigma(A) \longrightarrow 1 \in \mathbb{C};$$

nfatti se ψ è uno *isomorfismo di $\mathcal{C}(\sigma(A))$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ verificante

$$\psi(g_1) = A, \qquad \psi(g_2) = I,$$

per g_1, g_2 sopra definite, allora

$$\psi(p) = p(A)$$

per p polinomio in λ e $\bar{\lambda}$; poichè questi formano una *algebra densa in $\mathcal{C}(\sigma(A))$ e ψ è isometrico

$$\psi(f) = f(A), \qquad \forall \; f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$$

per continuità.

ESERCIZIO:

Descrivere il calcolo funzionale continuo per l'operatore normale limitato A dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ nei seguenti casi:

a) $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ e A è una matrice diagonale n x n.

b) $\mathcal{H} = L^2[(0,1)]$ e A è l'operatore di moltiplicazione per λ o, più in gene

8.9 TEOREMA (SPECTRAL MAPPING)

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE NORMALE; PER OGNI FUNZIONE $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ SI HA

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

Dim.

Sia $\mathcal{A}$ la C^*-algebra con identità generata da A e $f(A) \in \mathcal{A} \longrightarrow \widehat{f(A)} = f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ la trasformazione di Gelfand. Per quanto visto

$$\sigma(f(A)) = \widehat{f(A)}\,(\sigma(\mathcal{A})) = f(\sigma(A)). \qquad \square$$

NOTA: Nel § 2, cap. VII abbiamo incontrato il calcolo funzionale analitico per un elemento A di un 'algebra di Banach $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$; se A è un elemento normale della C^*-algebra $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ il calcolo funzionale continuo è una estensione del calcolo funzionale analitico?

Naturalmente ci aspettiamo una risposta affermativa; questa è una semplice conseguenza del teorema di Runge (si veda per esempio Bonsall, Duncan (1) che ci permette di approssimare ogni funzione analitica in un intorno di $\sigma(A)$ mediante funzioni razionali con poli esterni a $\sigma(A)$.

NOTA: Sia A un operatore normale limitato dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$; per il teorema di Tietze ogni funzione $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ è la restrizione a $\sigma(A)$ di una funzione continua e limitata del piano complesso in sè. Quindi il calcolo funzionale continuo ci permette di trovare uno *omomorfismo π della C^*-algebra $\mathcal{C}$ delle funzioni $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue e limitate nella C^*-algebra $\mathcal{A}$ con identità generata da A

$$\pi \quad : \quad f \in \mathcal{C} \longrightarrow f|_{\sigma(A)} \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \to f\,(A)$$

.ale che

$$\pi(f) = I \quad \text{se} \quad f(z) = 1, \ \forall z \in \sigma(A)$$

$$n(\pi) = \left\{ f \in \mathcal{C} \ / \ f|_{\sigma(A)} = 0 \right\}.$$

/ale anche il seguente viceversa di quanto detto.

3.10 PROPOSIZIONE

SIA $\mathcal{C}$ LA C^*- ALGEBRA DELLE FUNZIONI $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ CONTINUE E LIMITATE, $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UNO *OMOMORFISMO DI $\mathcal{C}$ IN $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ TALE CHE ESISTA UN COMPATTO $Q \subset \mathbb{C}$ E

$$\pi(f) = I \quad \text{se} \quad f(z) = 1, \ z \in Q.$$

ALLORA ESISTE UN OPERATORE NORMALE $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ TALE CHE

$$(8.2) \quad \sigma(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ / \ f(z) = 0, \ \forall f \in n(\pi) \right\}$$

$$= \bigcap_{Q \subset \mathbb{C}} \left\{ Q \text{ COMPATTO } / \ \pi(f) = I \text{ SE } f(z) = 1, \quad z \in Q \right\}.$$

Dim.

Sia $\sigma(A)$ definito dalla (8.2); per il teorema di Tietze esiste $f \in \mathcal{C}$ con $f(z) = z$, $z \in \sigma(A)$;

Poniamo

$$A \equiv \pi(f);$$

Prima di concludere questo paragrafo vogliamo usare il lemma 8.1 per ottenere una annunciata proprietà degli operatori compatti.

8.11 PROPOSIZIONE

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO E COMPATTO. ESISTE UNA FAMIGLIA ORTONORMALE $\{x_1, x_2, \dots\}$ DI AUTOVETTORI DI A

$$A x_n = \lambda_n x_n, \qquad \lambda_n \in \mathbb{C}$$

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \qquad |\lambda_n| \geq \dots$$

TALE CHE

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x_n, x)\, x_n, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

PERTANTO OGNI OPERATORE $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ E' UNIFORMEMENTE APPROSSIMABILE CON OPERATORI A RANGO FINITO CONTINUI.

Dim.

Per la teoria di Riesz-Shauder $\sigma(A) - \{0\}$ consiste in una famiglia al più numerabile di autovalori di molteplicità finita. Per ogni autovalore non nullo consideriamo una base ortonormale per il sottospazio dei relativi autovettori; poichè A è autoaggiunto, autovettori relativi a differenti autovalori sono ortogonali; quindi possiamo unire le singole basi ortonormali e formare una famiglia $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \dots\}$ ortonormale di vettori.

Sia M il sottospazio lineare chiuso generato da $\mathcal{F}$; ovviamente $A M \subset M$ e, poi

Posto $A_0 = A|_{M^\perp}$ è subito visto che $\sigma(A_0)$ contiene il solo 0, cioè spr $(A_0) = 0$ e poichè A è autoaggiunto

$$\| A_0 \| = 0 \quad , \text{cioè} \quad A M^\perp = \{0\}.$$

E' chiaro a questo punto che

$$A : x \in \mathcal{H} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x_n, x) x_n \in \mathcal{H},$$

dove $Ax_n = \lambda_n x_n$, e che possiamo ordinare i λ_n in modo che il modulo sia decrescente. Se $\mathcal{F}$ ha coordinalità infinita si consideri la successione di operatori $A_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$A_k : x \in \mathcal{H} \rightarrow \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (x_n, x) x_n \in \mathcal{H}, \qquad k \in \mathbb{N};$$

allora gli A_k sono a rango finito e

$$\| A - A_k \| \longrightarrow 0.$$

Poichè ogni operatore $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si decompone nella combinazione lineare di due operatori autoaggiunti

$$T = \frac{1}{2} (T + T^*) + i \frac{1}{2i} (T - T^*)$$

segue anche l'ultima asserzione. $\square$

VIII. 2 CALCOLO FUNZIONALE BORELIANO; TEORIA SPETTRALE PER OPERATORI NORMALI LIMITATI.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operatore normale; il calcolo funzionale continuo ci permette di calcolare funzioni continue di A; la teoria spet

trale ha però bisogno di qualcosa di più: per esempio si vuole definire $\chi_E(A)$ quando $\chi_E(\lambda)$ sia la funzione ~~caratteristica del boreliano~~ E.
Ciò sarà possibile quando avremo sviluppato il calcolo funzionale boreliano.

Siano x,y vettori di $\mathcal{H}$; poichè lo *isomorfismo $f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \rightarrow f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è isometrico, abbiamo

$$|(x,f(A)y)| \leqslant \|x\| \, \|y\| \, \|f(A)\| = \|x\| \, \|y\| \, \|f\|,$$

quindi il funzionale lineare su $\mathcal{C}(\sigma(A))$

$$f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) \longrightarrow (x, f(A)\,y) \in \mathbb{C}$$

è continuo di norma minore o uguale a $\|x\| \, \|y\|$.
Per il teorema di Riesz-Markov (si veda per es. Reed Simon vol. I (13) oppure Loomis (17)) esiste una ed una sola misura regolare $\mu_{x,y}$ sul piano complesso con

$$\operatorname{supp} \mu_{x,y} \subset \sigma(A),$$

tale che

$$(x, f(A)y) = \int f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda)$$

per ogni funzione continua complessa f.

Sia $\mathcal{B}$ l'insieme delle funzioni boreliane limitate di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$; con le operazioni punto per punto e la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)| , \qquad f \in \mathcal{B},$$

$\mathcal{B}$ è una C^*-algebra. Naturalmente $\mathcal{C}$, l'algebra delle funzioni $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue e limitate, è una C^*-sottoalgebra di $\mathcal{B}$.

Poichè $\mu_{x,y}$ è una misura regolare di norma minore o uguale a $\|x\|\,\|y\|$, per ogni $f \in \mathcal{B}$, $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\{x, y\}_f \equiv \int f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda)$$

è lineare in y, antilineare in x e soddisfa

$$\{x,y\}_f \leq \|x\|\,\|y\|\,\|f\|_\infty .$$

Per il teorema di Riesz esiste un operatore lineare continuo f(A) tale che

8.3) $$(x,f(A)y) = \{x,y\}_f = \int f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda).$$

Sia $\mathcal{A}^-$ la chiusura forte della C^*-algebra $\mathcal{A}$.

8.12 TEOREMA (Calcolo funzionale boreliano).

SIA A UN OPERATORE NORMALE LIMITATO DELLO SPAZIO DI HILBERT $\mathcal{H}$ E $\mathcal{A}$ LA C^*-SOTTOALGEBRA DI $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ GENERATA DA A, I.

L'ANTITRASFORMAZIONE DI GELFAND DI $\mathcal{A}$ SI ESTENDE IN UN UNICO *OMOMORFISMO

$$f \in \mathcal{B} \longrightarrow f(A) \in \mathcal{A}^-$$

DELLA C^*-ALGEBRA DELLE FUNZIONI BORELIANE LIMITATE NELLA CHIUSURA FORTE DELLA C^*-ALGEBRA $\mathcal{A}$, CON LE PROPRIETA'

1. $\|f(A)\| \leq \|f\|_\infty$. $\quad f \in \mathcal{B}$

PUNTO PER PUNTO, ALLORA

$$f_n(A)\,x \longrightarrow f(A)x, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Dim.

L'estensione definita dalla (8.3) è una applicazione di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ che è per definizione

lineare,

involutiva: $f(A)^* = \bar{f}(A)$, $f \in \mathcal{B}$,

contrattiva: $\|f(A)\| \leq \|f\|_\infty$, $f \in \mathcal{B}$.

Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{B}$ una successione equilimitata:

$$\|f_n\|_\infty \leq M, \; n \in \mathbb{N}, \quad M > 0;$$

se $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ $\mu_{x,x}$ q.o. per il teorema della <u>convergenza dominata</u> di Lebesgue e per la (8.3), abbiamo

$$(x, f_n(A)x) \longrightarrow (x, f(A)x),$$

Poichè ogni $f \in \mathcal{B}$ è limite $\mu_{x,x}$ q.o. di una successione equilimitata di funzioni continue[+] e $f \in C(\sigma(A)) \to f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è uno *isomorfismo, è di diretta verifica che $f \in \mathcal{B} \to f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è uno *omomorfismo. In particolare per ottenere il punto 9 basta osservare che, per la successi...

l che implica ancora

$$\| f_n (A) x - f(A) x\|^2 = (x, |f_n - f|^2 (A) x) \to 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

L'unicità del calcolo funzionale boreliano è conseguenza del punto 2 e dell'unicità del calcolo funzionale continuo. $\square$

Osservazione: Poichè $f \in \mathcal{B} \to f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è uno *omomorfismo, $\{f(A) / f \in \mathcal{B}\}$ è una C^*-algebra commutativa; in particolare $f(A)$, $f \in \mathcal{B}$, commuta con A, A^* e con le funzioni continue di A. Di più da $f(A) \in \mathcal{A}^-$ per $f \in \mathcal{B}$ segue

$$f(A)\, B = B\, f(A),$$

per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che

$$B\, A = A\, B, \qquad B\, A^* = A^* B.$$

Se $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *algebra poniamo

$$\mathfrak{A}' = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,/\, A\, B = B\, A \quad \forall B \in \mathfrak{A}\}$$

per indicare il commutante di $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'' = (\mathfrak{A}')'$ per indicare il bicommutante di $\mathfrak{A}$. Possiamo allora riformulare quanto detto con

$$f(A) \in \mathcal{A}'', \qquad f \in \mathcal{B}$$

cioè $f(A)$ appartiene al bicommutante della C^*-algebra generata da A.

Il codominio dell'omomorfismo $f \in \mathcal{B} \to f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ non esaurirà, in generale, $\mathcal{A}''$; comunque ciò sarà possibile se estendiamo ancora più, in modo massimale, il calcolo funzionale boreliano: precisamente vale il seguente teorema per la cui dimostrazione rimandiamo a J. DIXMIER (3) ch. 1, § 7, prop. 1 e seguenti.

8.13 TEOREMA

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT SEPARABILE; $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE NORMALE E $\mathcal{A}$ LA C^*-ALGEBRA CON IDENTITA' GENERATA DA A; ESISTE UNA ED UNA SOLA CLASSE DI MISURA SUL PIANO COMPLESSO TALE CHE:

$$\mu_{x,y} \prec \mu, \qquad x,y \in \mathcal{H}$$

$$\mu_{x,y} \prec \nu \quad \forall x,y \in \mathcal{H} \Rightarrow \mu \prec \nu$$

OVE ν E' UNA MISURA $\nu' \prec \nu''$ SIGNIFICA ν' E' ASSOLUTAMENTE CONTINUA RISPETTO A ν''.

IL CALCOLO FUNZIONALE BORELIANO SI ESTENDE IN UN UNICO *ISOMORFISMO

$$f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow f(A) \in \bar{\mathcal{A}}$$

TALE *ISOMORFISMO E' SURGETTIVO E

$$\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}''.$$

NOTA: L'ultima asserzione del teorema precedente è conseguenza del più generale teorema di densità di Von Neumann (DIXMIER (3) cap. I, § 3, teor. 2 e cor. 1): tale teorema asserisce che se $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una *algebra con identità, allora la sua chiusura forte coincide con la sua chiusura debole e

$$\mathfrak{A}^{-\text{deb}} = \bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}''.$$

Una *sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ per cui $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$ si chiama algebra di Von Neumann. Dunque possiamo rienunciare il teorema 8.13 dicendo che l'antitrasformazione di Gelfand si estende ad uno *isomorfismo di $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ sull'algebra di Von Neumann $\mathcal{A}''$ generata ad A; di più tale isomorfismo è continuo quando si munisca

$L^{\infty}(\mathbb{C}, d\mu)$ della topologia *debole come duale di $L^1(\mathbb{C}, d\mu)$ e $\mathcal{A}''$ della topologia debole degli operatori lineari.

NOTA: Se $f \in \mathcal{B}$ e $f|_{\sigma(A)} = 0$ allora $f(A) = 0$; il viceversa è falso in generale (se ne produca un esempio).

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operatore normale e $\mathcal{A}$ la C^*- algebra generata da A, I; se Δ è un sottoinsieme boreliano del piano complesso, la sua funzione caratteristica χ_Δ è boreliana e verifica

$$\chi_\Delta = \overline{\chi_\Delta} = \chi_\Delta^2 .$$

dunque $E_\Delta \equiv \chi_\Delta(A)$ è un proiettore autoaggiunto di $\mathcal{A}''$. Poichè E_Δ commuta con A e A^*, E_Δ riduce A, cioè, posto $\mathcal{H}_\Delta = E_\Delta(\mathcal{H})$,

$$A\mathcal{H}_\Delta \subset \mathcal{H}_\Delta , \qquad A^*\mathcal{H}_\Delta \subset \mathcal{H}_\Delta ,$$

$A|_{\mathcal{H}_\Delta}$ è normale. Ciò vale per anche per ogni funzione continua di A, dunque

$$f \in \mathcal{C} \longrightarrow f(A)\, E_\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Delta)$$

uno *omomorfismo.

.4, PROPOSIZIONE

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE NORMALE. SE $\Delta \subset \mathbb{C}$ E' TALE CHE $\Delta \cap \sigma(A)$ SIA UN SOTTOINSIEME DI $\sigma(A)$ CHE SIA LA CHIUSURA DI UN APERTO NELLA TOPOLOGIA INDOTTA DA $\sigma(A)$, ALLORA IL NUCLEO DELL'OMOMORFISMO SOPRA DEFINITO

E' $$\left\{ f \in \mathcal{C} \,/\, f|_{\Delta \cap \sigma(A)} = 0 \right\}.$$

Dim.

Sia $f \in \mathcal{C}$. Se $f|_{\Delta \cap \sigma(A)} = 0$, allora

$f\chi_\Delta|_{\sigma(A)} = 0$ e quindi

$$f(A)\, E_\Delta = (f\,\chi_\Delta)(A) = 0.$$

Viceversa sia $f|_{\Delta \cap \sigma(A)} \neq 0$; se D è un aperto di $\Delta \cap \sigma(A)$ con $\overline{D} = \Delta \cap \sigma(A)$, esiste $\lambda \in D$ tale che $f(\lambda) \neq 0$, perchè f è continua; sia $g \in \mathcal{C}$ tale che

$$g(\lambda) = 1, \qquad \operatorname{supp} g \subset \Delta \cap \sigma(A);$$

poichè $fg|_{\sigma(A)} \neq 0$ e $fg|_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A))$,

segue

$$f(A)\; E_\Delta\; g(A) = (f\,g)(A) \neq 0$$

e pertanto $f(A)\, E_\Delta \neq 0$. $\square$

8.15 COROLLARIO

NELLE IPOTESI DEL TEOREMA PRECEDENTE E'

$$\sigma(A|\mathcal{H}_\Delta) = \sigma(A) \cap \Delta.$$

Dim.

E' conseguenza della proposizione precedente e della proposizione 8.10, precisamente della (8.2). $\square$

Osservazione: Supponiamo come prima che $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sia un operatore normale; se il boreliano $\Delta \subset \mathbb{C}$ si riduce ad un punto $\lambda_o \in \sigma(A)$, allora $\chi_{\{\lambda_o\}}(A) = E_{\{\lambda_o\}}$ è il proiettore ortogonale sugli autovettori di autovalore λ_o. Infatti, poichè $A - \lambda_o I$ è un operatore normale, è

$$n(A - \lambda_o I) = n(A^* - \bar{\lambda}_o I),$$

cioè se $x \in \mathcal{H}$

$$Ax = \lambda_o x \Leftrightarrow A^* x = \bar{\lambda}_o x:$$

pertanto per ogni polinomio p in λ e $\bar{\lambda}$ e $x \in n\ (A - \lambda_o I)$ è

$$p\ (A)\ x = p(\lambda_o)\ x;$$

per il teorema di Stone-Weierstass segue

$$f(A)\ x = f\ (\lambda_o)x, \qquad \forall f \in C(\sigma(A)).$$

Ma allora, approssimando opportunamente $\chi_{\{\lambda_o\}}$ mediante funzioni continue, è

$$\chi_{\{\lambda_o\}}(A)x = \chi_{\{\lambda_o\}}(\lambda_o)x = x$$

e pertanto

$$n\ (A - \lambda_o I) \subset E_{\{\lambda_o\}}\mathcal{H}$$

Viceversa se $x \in E_{\{\lambda_0\}}\mathcal{H}$, allora

$$Ax = A\,E_{\{\lambda_0\}}x = \lambda_0 \chi_{\{\lambda_0\}}(A)x = \lambda_0 x$$

e quindi

$$E_{\{\lambda_0\}}\mathcal{H} = n(A - \lambda_0 I).$$

Questa osservazione ci sarà utile nella dimostrazione del teorema spettrale per operatori unitari.

La corrispondenza $\Delta \to \mathcal{H}_\Delta$ fornisce l'analisi spettrale dell'operatore normale A nel senso del corollario precedente.

Vicevèrsa la corrispondenza $\Delta \to \mathcal{H}_\Delta$ determina l'operatore normale A. Vediamo ciò esplecitamente per A autoaggiunto

Se $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, come è noto lo spettro di A è reale, ponendo $\Delta = (-\infty, \lambda]$

$$E(\lambda) \equiv E_{(-\infty,\lambda)} = \chi_{(-\infty,\lambda]}(A),$$

otteniamo una funzione della retta reale a valori proiettori autoaggiunti di $\mathcal{H}$ tale che

$$E(\lambda) \leqslant E(\lambda') \qquad \text{se} \quad \lambda \leq \lambda'$$

se $\lambda' > \lambda$ e $\lambda' \to \lambda$, $\chi_{(-\infty,\lambda']} \longrightarrow \chi_{(-\infty,\lambda]}$

punto per punto, quindi per il teorema 8.12, punto 2, $E(\lambda') \to E(\lambda)$ nella topologia forte;

inoltre

$$E(a) = 0 \quad \text{se} \quad a < \mu \quad \forall \mu \in \sigma(A),$$

$$E(b) = I \quad \text{se} \quad b \geq \mu \quad \forall \mu \in \sigma(A).$$

Segue poi facilmente dal corollario 8.15

$$\sigma(A|_{(E(\lambda) - E(\mu))\mathcal{H}}) = \overline{\sigma(A) \cap (\lambda, \mu]}$$

Ricapitolando possiamo definire

8.16 DEFINIZIONE

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Una <u>famiglia spettrale</u> in $\mathcal{H}$ è una funzione $\lambda \in \mathbb{R} \to E(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ della retta reale nei proittori ortogonali di $\mathcal{H}$ tale che:

(i) $E(\lambda) = E(\lambda + 0)$,

(ii) $E(\lambda)$ è monotona crescente,

(iii) $E(-\infty) = 0, \qquad E(+\infty) = I$;

ove $E(\lambda + 0) = \lim\limits_{\substack{\lambda' \to \lambda \\ \lambda' > \lambda}} E(\lambda')$ e $E(\pm \infty) = \lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} E(\lambda)$ nella topologia forte.

8.17 TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI AUTOAGGIUNTI LIMITATI

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO. ESISTE UNA ED

UNA SOLA FAMIGLIA SPETTRALE $\lambda \in \mathbb{R} \to E(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ TALE CHE

$$A = \int \lambda \, dE(\lambda)$$

OVE L'INTEGRALE E' LIMITE UNIFORME DELLE SOMME PARZIALI DI RIEMANN - STIELTJES.

INOLTRE $E(a) = 0$, $E(b) = I$ se $\sigma(A) \subset (a,b]$ e

$$f(A) = \int f(\lambda) \, dE(\lambda)$$

PER OGNI f FUNZIONE COMPLESSA BORELIANA LIMITATA DELLA RETTA.

Dim.

Esistenza: sia $E(\lambda) = \chi_{(-\infty,\lambda]}(A)$; è chiaro che E è una famiglia spettrale in $\mathcal{H}$ e

$$E(a) = 0, \quad E(b) = I \qquad \text{se } \sigma(A) \subset (a,b] .$$

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ boreliana limitata; dato $\varepsilon > 0$ sia $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ un ricoprimento dell'insieme $\{z \in \mathbb{C} / |z| < \|f\|_\infty\}$ mediante boreliani di diametro minore di ε; sia

$$\Delta_i = f^{-1}(\Lambda_i), \quad i = 1, \dots p,$$

e $\lambda_i \in \Delta_i$. E'

$$f - \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) \chi_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^{p} (f - f(\lambda_i)) \chi_{\Delta_i}$$

uindi

$$\| f(A) - \sum_{i=1}^{?} f(\lambda_i) E_{\Delta_i} \| \leqslant \varepsilon$$

ioè

$$f(A) = \int f(\lambda)\, d\, E(\lambda), \qquad \text{conv. unif.}\ .$$

nicità: sia F una famiglia spettrale in $\mathcal{H}$ tale che

$$A = \int \lambda\, dF(\lambda).$$

egue che $F(\lambda)$ commuta con A e

(8.4) $$A\,F(\lambda_0) \leqslant \lambda_0 F(\lambda_0), \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

(8.5) $$A\,(I-F(\lambda_0)) \geqslant \lambda_0 (I-F(\lambda_0)), \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

ioè

$$A\big|_{F(\lambda_0)\mathcal{H}} \leqslant \lambda_0 I\big|_{F(\lambda_0)\mathcal{H}}$$

l'analoga per la (8.5); ma allora per il teorema di Gelfand-Naimark

$$\sigma(A\big|_{F(\lambda_0)\mathcal{H}}) \subset (-\infty, \lambda_0]$$

$$\sigma(A\big|_{(I-F(\lambda_0))\mathcal{H}}) \subset [\lambda_0, +\infty)$$

he implicano

$$F(-\|A\| - 0) = 0 \quad , \qquad F(\|A\|) = I.$$

: ora $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$ è una suddivisione di un intervallo aperto a sinistra contenente $[-\|A\|, \|A\|]$ e

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i' (F(\lambda_{i+1}) - F(\lambda_i)), \qquad \lambda_i' \in (\lambda_i, \lambda_{i+1}].$$

è una somma parziale di Riemann che approssima A, allora

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i'^n (F(\lambda_{i+1}) - F(\lambda_i)) = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i' (F(\lambda_{i+1}) - F(\lambda_i))\right)^n$$

è una somma parziale di Riemann che approssima A^n e pertanto

$$A^n = \int \lambda^n \, dF(\lambda), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Segue

$$p(A) = \int p(\lambda) \, dF(\lambda)$$

per ogni polinomio p e per il teorema di Stone-Weirstrass

$$f(A) = \int f(\lambda) \, dF(\lambda), \quad f \in \mathcal{C}$$

Dunque per ogni $f \in \mathcal{C}$

$$\int f(\lambda) \, d(F(\lambda)x, y) = \int f(\lambda) \, d\mu_{x,y}, \quad x, y \in \mathcal{H}$$

cioè

$$d(F(\lambda)x, y) = d\mu_{x,y}, \quad x, y \in \mathcal{H}$$

e pertanto F = E.

$\square$

.18 TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI UNITARI

IA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE UNITARIO, CIOE' $U^*U = UU^* = I$.
SISTE UNA FAMIGLIA SPETTRALE TALE CHE

$$E(\lambda) = 0 \text{ per } \lambda < 0$$

$$E(\lambda) = I \text{ per } \lambda \geqslant 2\pi$$

$$U = \int e^{i\lambda} dE(\lambda) \qquad \text{conv. unif.}$$

INOLTRE

$$f(U) = \int f(e^{i\lambda})\, dE(\lambda), \quad f \in \mathcal{B}.$$

Dim.

Mostriamo che $\sigma(U)$ è contenuto nella circonferenza unitaria. Sia $\mathcal{M}$ la C^*-algebra (abeliana) generata da U, I. Per ogni $\phi \in \sigma(\mathcal{M})$

$$|\phi(U)|^2 = \overline{\phi(U)}\,\phi(U) = \phi(U^*U) = \phi(I) = 1$$

che è quanto volevamo (corollario 7.11 e Teorema 8.7).

Posto

$$\Gamma_\lambda = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1,\ \arg z \in [0, \lambda] \right\},$$

definiamo

$$E(\lambda) = \chi_{\Gamma_\lambda}(U).$$

Chiaramente $E(\lambda)$ è una famiglia spettrale. Il resto della dimostrazione è analogo

Nota: E (o) = $\chi_{\{1\}}(U)$ è il proiettore ortogonale sul sottospazio degli autovettori di U relativi all'autovalore 1. Quindi sarà E(o) = 0 = E(0-0) se e solo se $n(I-U) = \{0\}$. Invece è sempre $E(2\pi) = E(2\pi - 0) = I$ perchè arg $z \in [0, 2\pi)$ per ogni z.

VIII.3 TEORIA SPETTRALE PER OPERATORI AUTOAGGIUNTI NON LIMITATI

Abbiamo visto come, dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, esiste una corrispondenza tra famiglie spettrali limitate (cioè costanti al di fuori di un compatto) in $\mathcal{H}$ e operatori normali limitati di $\mathcal{H}$. In particolare esiste una corrispondenza tra operatori unitari di $\mathcal{H}$ con famiglie spettrali con supporto in $[0, 2\pi)$. D'altra parte la trasformazione di Cayley (cap.VI.§3) stabilisce una corrispondenza tra operatori autoaggiunti (anche illimitati) di $\mathcal{H}$ con gli operatori unitari di $\mathcal{H}$. Segue che possiamo stabilire una corrispondenza tra gli operatori autoaggiunti di $\mathcal{H}$ e le famiglie spettrali di $\mathcal{H}$.

8.19 TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI AUTOAGGIUNTI NON LIMITATI.

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E A UN OPERATORE LINEARE AUTOAGGIUNTO DI $\mathcal{H}$. ESISTE UNA UNICA FAMIGLIA SPETTRALE $\lambda \in \mathbb{R} \to E(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ TALE CHE

(i) $\mathcal{D}_A = \left\{ x \in \mathcal{H} \,/\, \int \lambda^2 \, d(E(\lambda)x, x) < \infty \right\}$

(ii) $Ax = \int \lambda \, dE(\lambda) x, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A.$

Dim.

Sia U la trasformazione di Caylay di A; U è unitario con $n(I - U) = \{0\}$ e

$$A = i\,(I + U)\,(I - U)^{-1}.$$

L'applicazione

ı inversa

$$\lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{\lambda - i}{\lambda + i}$$

ıe una corrispondenza biunivoca topologica e monotona crescente tra la circonfe
ıza unitaria privata del punto $\{1\}$ con la retta reale.

a F la famiglia spettrale di U;

ichè $\mathfrak{N}(I-U) = \{0\}$ è $F(0) = 0$;

niamo

$$E(\lambda) = F\left(\arg \frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

ıiaramente E è una famiglia spettrale; mostriamo che E verifica (i) e (ii) ed è
ıica.

ıichè $\mathcal{D}_A = \mathcal{R}(I-U)$ per dimostrare la (i) basta ottenere l'equiva
ınza tra

(a) $x = (U - I)z, \quad z \in \mathcal{H},$

(b) $\int \lambda^2 d(E(\lambda)x, x) < \infty.$

er definizione (b) è equivalente a

$$\int_0^{2\pi} \left(i \frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}\right)^2 d(F(\vartheta)x, x) < \infty$$

poichè

$$\left(i \frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}\right)^2 = \frac{4}{|1-e^{i\vartheta}|^2} - 1$$

(b) è ancora equivalente a

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{i\vartheta}-1|^2} (F(\vartheta)x,x) < \infty .$$

(a) $\Rightarrow$ (b): Supponiamo $x = (U-I)z$ con $z \in \mathcal{H}$.

Se $0<\vartheta_1 < \vartheta_2 < 2\pi$ per il teorema 8.18, essendo il calcolo funzionale boreliano uno omomorfismo, è

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1}{e^{i\vartheta}-1} dF(\vartheta)\, x = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1}{e^{i\vartheta}-1} dF(\vartheta)\,(U - I)\, z =$$

$$= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1}{e^{i\vartheta}-1} dF(\vartheta) \int_0^{2\pi} (e^{i\vartheta}-1)\, dF(\vartheta)\, z = (F(\vartheta_2) - F(\vartheta_1))\, z$$

quindi

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1}{|e^{i\vartheta}-1|^2} (F(\vartheta)x,x) = ((E(\vartheta_2) - E(\vartheta_1))\, z,z)$$

che converge a (z, z) quando $\vartheta_1 \to 0$ e $\vartheta_2 \to 2\pi$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sia $x \in \mathcal{H}$ tale che

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{i\vartheta}-1|^2} (F(\vartheta)\, x,x) < \infty;$$

e α_n e β_n, $n \in \mathbb{N}$, sono successioni dell'intervallo $(0, 2\pi)$ con $\alpha_n \to 0$ e $\beta_n \to 2\pi$ segue dalla proprietà di monotonia della famiglia spettrale che

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{1}{e^{i\vartheta}-1}\, dF(\vartheta)\, x \text{ è di Cauchy in } \mathcal{H}.$$

ia $z \in \mathcal{H}$ il limite di tale successione; segue

$$(U - I)\, z = \lim_n \left(E(\beta_n) - E(\alpha_n)\right) x = x.$$

erifichiamo ora la proprietà (ii): sia $x \in \mathcal{D}_A$

$$x = (I - U)\, z \quad \text{con} \quad z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e^{i\vartheta}}\, dF(\vartheta)\, x.$$

llora

$$Ax = i\,(I + U)\, z = i\,(I + U) \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 2\pi}} \int_\alpha^\beta \frac{1}{1-e^{i\vartheta}}\, dF(\vartheta)\, x$$

$$= \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \int^\beta i\, \frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}\, dF(\vartheta)\, x = \lim_{\lambda_1 \to -\infty} \int^{\lambda_2} \lambda\, dE(\lambda) = \int \lambda\, dE(\lambda)\, x$$

Resta da provare che la famiglia spettrale E è unica. Data l'unicità della formu la integrale per operatori unitari è sufficiente dimostrare che se E è una famiglia spettrale tale che

$$A\,x = \int \lambda\, dE(\lambda)\, x \,, \qquad x \in \mathcal{D}_A$$

allora $\vartheta \to F(\vartheta) \equiv E(-\operatorname{cotg}\vartheta)$ è la famiglia spettrale relativa all'anti trasformata di Cayley di A.

Sia $x \in \mathcal{D}_A$;

$$\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta}\, dF(\vartheta)(A+iI)x = \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta} dF(\vartheta) \lim_{\substack{\lambda_1\to-\infty\\ \lambda_2\to+\infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\lambda+i)\, dE(\lambda)$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta} dF(\vartheta) \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 2\pi}} \int_\alpha^\beta \left(i\frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}+i\right) dF(\vartheta)x =$$

$$= \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 2\pi}} \int_\alpha^\beta ie^{i\vartheta}\left(\frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}+1\right) dF(\vartheta)x =$$

$$= \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 2\pi}} \int_\alpha^\beta \left(i\frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}-i\right) dF(\vartheta) =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda_1\to-\infty\\ \lambda_2\to+\infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\lambda-i)\, dE(\lambda)x = (A-iI)x$$

$$\int e^{i\vartheta}\, d\, F(\vartheta)$$ è la trasformata di Cayley di A.

$\square$

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e A un operatore autoaggiunto di $\mathcal{H}$; è noto e A è privo di spettro residuo, quindi possiamo decomporre $\mathbb{R}$ nell'unione disgiun di $\sigma_c(A)$ (spettro continuo di A), $\sigma_p(A)$ (spettro puntuale di A) e di $(A)\cap\mathbb{R}$; naturalmente ognuno di questi insiemi può essere vuoto, fermo estando però $\sigma(A)\neq\emptyset$.

Sia $\lambda\in\mathbb{R}\to E(\lambda)\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la famiglia spettrale di A; E è una funzione ontinua a destra nella topologia forte; cosa accade nei punti di discontinuità? ostriamo che

$$\sigma_p(A) = \{\lambda\in\mathbb{R} \,/\, E(\lambda-0)\neq E(\lambda)\}$$

$$\sigma_c(A) = \{\lambda\in\mathbb{R} \,/\, E(\lambda) \text{ è cont. in } \lambda \text{ e } \lambda\notin P(A)\}$$

$$P(A)\cap\mathbb{R} = \{\lambda\in\mathbb{R} \,/\, E(\lambda) \text{ è cost. in un intorno di } \lambda\}$$

Sia infatti λ_0 un punto di discontinuità per $E_{\{\lambda\}} = E(\lambda) - E(\lambda-0)$ e dimostriamo che, come nel caso A limitato,

$$E_{\{\lambda_0\}}\mathcal{H} = n(A-\lambda_0 I).$$

Se $x\in E_{\{\lambda\}}\mathcal{H}$

$$Ax = \int\lambda\, d\,E(\lambda)\,.\,E_{\{\lambda_0\}}x = \lambda_0 x.$$

D'altra parte se $x \in n(A-\lambda_0 I)$

$$0 = \|(A-\lambda_0 I)x\|^2 = \int (\lambda-\lambda_0)^2 \, d\|E(\lambda)x\|^2$$

e poichè $E(-\infty) = 0$ e $E(+\infty) = I$ deve essere

$$E\{\lambda_0\}x = x$$

E' chiaro che $\lambda_0 \in P(A) \cap \mathbb{R}$ implica l'esistenza di un intorno di in cui E è costante.

Se poi E è continua in λ_0 ma non costante in nessun intorno di λ_0, allora possiamo trovare una successione di intervalli $(a_1, b_1) \subset (a_2, b_2) \ldots$ di λ_0 con

$$E_{(a_1,b_1)} \not\supseteq E_{(a_2,b_2)} \not\supseteq \ldots$$

Sia x_n appartenenti a $E_{(a_n,b_n)}\mathcal{H}$ di norma 1:

$$\|(A-\lambda_0 I)x_n\|^2 = \int_{a_n}^{b_n} (\lambda-\lambda_0)^2 \, d\|E(\lambda)x_n\|^2 \geqslant b_n - a_n \longrightarrow 0$$

il che prova che $A - \lambda_0 I$ non ammette un inverso continuo.

Supponiamo che $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ sia uno spazio di Hilbert di dimensione finita, A un operatore autoaggiunto di $\mathcal{H}$. Per il teorema spettrale A può essere rappresentato mediante una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono gli autovalori di A ripetuto ciascuno con la sua molteplicità.

Se B è un secondo operatore autoaggiunto di $\mathcal{H}$, segue che A e B sono unitariamente equivalenti, cioè esiste un unitario U tale che

$$B = U A U^{-1} \qquad , \qquad U^* = U^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

e e solo se hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità.

In particolare se A e B hanno ogni autovalore di molteplicità 1, allora e A B sono unitariamente equivalenti se hanno lo stesso spettro.

Diversamente nel caso $\dim \mathcal{H} = \infty$ lo spettro è un invariante troppo povero per caratterizzare classi di operatori autoaggiunti.

8.20 DEFINIZIONE

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una C^*-algebra. Diremo che il vettore $\xi \in \mathcal{H}$ è ciclico per $\mathfrak{A}$ se

$$\mathfrak{A}\xi = \{A\xi \,/\, A \in \mathfrak{A}\}$$

è un sottospazio denso di $\mathcal{H}$. Se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore autoaggiunto, diremo che il vettore $\xi \in \mathcal{H}$ è ciclico per A se ξ è ciclico per la C^*-algebra con identità generata da A.

8.21 DEFINIZIONE

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operatore autoaggiunto. Diremo che A è <u>senza molteplicità</u> se esiste $\xi \in \mathcal{H}$ ciclico per A.

Lasciamo per esercizio verificare che, se $\dim \mathcal{H} < \infty$, dire che $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è senza molteplicità equivale a dire che ogni autovalore di A è di molteplicità 1.

8.22 TEOREMA

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE SENZA MOLTEPLICITA'. ESISTE UNA MISURA REGOLARE μ SU $\mathbb{R}$ IL CUI SUPPORTO COINCIDE CON $\sigma(A)$ TALE CHE A SIA UNITARIAMENTE EQUIVALENTE ALLA MOLTIPLICAZIONE PER LA FUNZIONE $\lambda : t \in \mathbb{R} \to t \in \mathbb{C}$

Dim.

Sia $\xi \in \mathcal{H}$ ciclico per A e E la famiglia spettrale di A. Definiamo

$$g(\lambda) = (E(\lambda)\xi, \xi), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

Segue che g è una funzione monotona crescente, continua a destra, costante al di fuori di $\sigma(A)$.

Inoltre se $f \geq 0$,

$$\int f(\lambda)\, dg(\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f\big|_{\sigma(A)} = 0:$$

infatti posto $f = h^* h$, $h \in \mathcal{C}$,

$$\int f(\lambda)\, dg(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h(A)\xi = 0,$$

d'altra parte se $h(A)\xi = 0$ segue

$$h(A)\, F(A)\xi = F(A)\, h(A)\xi = 0, \qquad F \in \mathcal{C},$$

e quindi $h(A) = 0$ perchè è ciclico; allora

$$f(A) = h^{*}(A)\, h(A) = 0$$

ertanto supp $dg \supset \sigma(A)$; poichè ovviamente vale la relazione opposta è

$$\operatorname{supp} dg = \sigma(A)$$

$C(\sigma(A))$ è denso in $L^2(\mathbb{R}, dg)$.

il teorema spettrale è

$$(f(A)\xi, \xi) = \int f(\lambda)\, dg(\lambda), \quad f \in C(\sigma(A)).$$

nsideriamo l'operatore lineare $U_o : \mathfrak{A}\xi \subset \mathcal{H} \to C(\sigma(A)) \subset L^2(\mathbb{R}, dg)$

$$U_o f(A)\xi = f, \qquad f \in C(\sigma(A));$$

è ben definito, infatti se $f \in C(\sigma(A))$,

$$\| U_o f(A)\xi \|^2 = \int \bar{f}(\lambda) f(\lambda)\, dg(\lambda) = (f(A)^{*} f(A)\xi, \xi) = \| f(A)\xi \|^2$$

oè U_o è isometrico e quindi unicamente estendibile ad una isometria $\mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, dg)$, essendo $\mathcal{D}_{U_o} = \mathfrak{A}\xi$ denso.

Poichè $C(\sigma(A))$ è denso in $L^2(\mathbb{R}, dg)$, U è suriettivo ed è quindi un operatore itario. Per ogni $f \in C(\sigma(A))$ è

$$U A U^{-1} f = U A f(A)\xi = U(\lambda f)(A)\xi = \lambda f$$

poichè $C(\sigma(A))$ è denso in $L^2(\mathbb{R}, dg)$ segue la tesi. $\square$

Il teorema precedente è un teorema di struttura per gli operatori autoaggiunti limitati senza molteplicità; ciò ci permette di studiare il problema di equivalenza unitaria per gli tali operatori assumendo direttamente che siano operatori di moltiplicazione in un certo spazio $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. A questo punto è evidente che il nostro problema è dare condizioni sulla misura μ. Come si vede facilmente, per esempio pensando al caso di dimensione finita, la misura μ non è univocamente determinata dall'operatore, vale però il seguente teorema.

8.23 TEOREMA

SIANO μ E ν DUE MISURE REGOLARI DI $\mathbb{R}$ A SUPPORTO COMPATTO E A, B GLI OPERATORI DI MOLTIPLICAZIONE PER λ RISPETTIVAMENTE IN $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ E $L^2(\mathbb{R}, \nu)$:

$$(A f)(t) = t f(t) \quad , \qquad f \in L^2(\mathbb{R}, \mu),$$

$$(B f)(t) = t f(t) \quad , \qquad f \in L^2(\mathbb{R}, \nu).$$

ALLORA A E B SONO UNITARIAMENTE EQUIVALENTI SE E SOLO SE μ E ν SONO MISURE EQUIVALENTI, CIOE' HANNO GLI STESSI INSIEMI DI MISURA NULLA.

Dim.

Supponiamo che esista un operatore unitario $U: L^2(\mathbb{R}, \mu) \to L^2(\mathbb{R}, \nu)$ tale che

$$A = U^{-1} B U;$$

allora, approssimando con polinomi e passando al limite,

$$f(A) = U^{-1} f(B) U \quad , \qquad \forall \quad f \in \mathcal{C}$$

' chiaro che $f(A)$ è l'operatore di moltiplicazione per f in $L^2(\mathbb{R},\mu)$ e l'a
alogo per B.

ia $x \in L^2(\mathbb{R},\mu)$ la classe di funzioni contenente la funzione $t \in \mathbb{R} \to 1 \in \mathbb{C}$,
sia $y = Ux \in L^2(\mathbb{R},\nu)$. E' per ogni $f \in \mathcal{C}$

$$\int f(t)\, d\mu(t) = (f(A)x, x) = (U^{-1} f(B) U x, x) = (f(B)y, y) =$$

$$= (f(B)y, y) = \int f(t)\, h(t)\, d\nu(t)$$

ve $h = |y|^2$ è una funzione positiva di $L^1(\mathbb{R},\nu)$. Segue

$$d\mu = h\, d\nu$$

ioè μ è assolutamente continua rispetto a ν. Scambiando μ e ν otteniamo l'equi
alenza tra μ e ν.

Viceversa siano μ e ν equivalenti. Poichè $\mu \prec \nu$ (μ è assolutamente continua
ispetto a ν) esiste per il teorema di Radon-Nikodym una funzione positiva $h \in L^1(\mathbb{R},\nu)$
ale che

$$d\mu = h\, d\nu.$$

ia $y = \sqrt{h} \in L^2(\mathbb{R},\nu)$ e definiamo l'operatore lineare $U_0 : L^2(\mathbb{R},\mu) \quad L^2(\mathbb{R},\nu)$

$$U_0 f(A) x = f(B) y \quad , \qquad \forall \quad f \in \mathcal{C}$$

/e $x(t) = 1$ q.o.. U è ben definito ed isometrico per ogni $f \in \mathcal{C}$

$$(f(B)\, y, y) = \int f(t)\, h(t)\, d\nu(t) = \int f(t)\, d\mu(t) =$$

$$= (f(A)\, x, x);$$

chiaramente $\{ f(A)\, x \,/\, f \in \mathcal{C} \}$ è denso in $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ (x è ciclico per la C^*-algebra generata da A,I) e quindi esiste una unica isometria U che estende U_0 .
Poichè abbiamo ancora $\nu \prec \mu$, esiste $h^{-1} \in L^1(\mathbb{R}, \nu)$

$$d\nu = h^{-1} d\mu ,$$

quindi $y(t) = \sqrt{h}(t) \neq 0$ νq. o. e pertanto $\{ f(B)\, y \,/\, f \in \mathcal{C} \}$ è denso in $L^2(\mathbb{R}, \nu)$, ossia U è unitario.
A questo punto è immediato verificare che

$$A = U^{-1} B\, U. \qquad \square$$

Il teorema precedente afferma che $\widehat{d\mu}$ <u>è un invariante unitario completo</u> per l'operatore autoaggiunto A senza molteplicità, dove $\widehat{d\mu}$ è la classe di misura determinata da μ (ossia l'insieme delle misure equivalenti a μ) quando A sia rappresentabile come operatore di moltiplicazione per λ in $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Dunque abbiamo caratterizzato completamente gli operatori autoaggiunti senza molteplicità.
Si può dimostrare che A è senza molteplicità se e solo se l'algebra di Von Neumann $\mathcal{R}$ generata da A coincide con il suo commutante (3, ch I, §6 corollario 2 della proposizione 4),

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}'$$

Se A è un operatore autoaggiunto limitato su uno spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$ esiste sempre un vettore $\xi \in \mathcal{H}$ ciclico per $\mathcal{R}'$ (3, ch I, § 2, corollario della proposizione 3); la misura

$$d\mu(\lambda) = (\xi, dE(\lambda)\xi)$$

definisce una classe di misura indipendente dalla scelta del vettore ξ ciclico per $\mathcal{R}'$ (3, appendice IV e ch I, § 7, proposizione 2). Una tale misura è detta basica. La classe delle misure basiche è caratterizzata dal teorema 8.13. Tale classe è un invariante unitario, ma non è un invariante completo in generale; tuttavia (vedi commenti finali) è un invariante completo per quasiequivalenza, cioè equivalenza unitaria modulo molteplicità.

E' importante a questo punto cercare di esprimere operatori autoaggiunti qualsiasi in funzione di operatori autoaggiunti senza molteplicità.

Supponiamo per semplicità che $\mathcal{H}$ sia uno spazio di Hilbert separabile e consideriamo un operatore autoaggiunto $A \in \mathcal{H}$.

Scegliamo arbitrariamente un vettore $\xi_1 \in \mathcal{H}$ non nullo e sia E_1 il proiettore autoaggiunto su $\overline{\mathcal{A}\xi_1}$, la chiusura di $\mathcal{A}\xi_1$, dove $\mathcal{A}$ è la C^*-algebra generata da A, I.

Segue che E_1 commuta con A, cioè $\mathcal{H}_1 = E_1\mathcal{H}$ è un sottospazio che riduce A, inoltre ξ_1 è ciclico per $A_1 = A|_{\mathcal{H}_1}$; scelto $0 \neq \xi_2 \in (I - E_1)\mathcal{H}$ possiamo ripetere la costruzione, porre $\mathcal{H}_2 = \overline{\mathcal{A}\xi_2}$ e ridurre A all'operatore $A_2 = A|_{\mathcal{H}_2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ senza molteplicità; applicando il lemma di Zorn possiamo allora asserire l'esistenza di sottospazi di Hilbert $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, N$, con $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tali che

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_N ,$$

cioè i proiettori ortogonali E_i su $\mathcal{H}_i$ verificano $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$ e $\mathcal{H}$ è generato dagli $\mathcal{H}_i$.

$$A = A_1 \oplus \dots A_N$$

cioè $A\big|_{\mathcal{H}_i} = A_i$ e ogni A_i è senza molteplicità.

Per il teorema 8.23 ogni A_i è caratterizzato da una classe di misura $\hat{d\mu_i}$; in generale però la succesione $\hat{d\mu_1}, \hat{d\mu_2}, \dots$ così ottenuta non è un invariante unitario perchè la succesione di vettori $f_1, f_2, \dots$ non è stata scelta in modo canonico. Nel caso particolare in cui le classi $\hat{d\mu_i}$, $i = 1, \dots N$, siano tutte equivalenti, cioè $\hat{d\mu_i} = \hat{d\mu}$ con $\hat{d\mu}$ classe di misura indipendente da i, allora $(\hat{d\mu}, N)$ è un invariante unitario, vale cioè il seguente teorema.

8.24 TEOREMA

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT E A, B OPERATORI AUTOAGGIUNTI DI $\mathcal{H}$ SENZA MOLTEPLICITA'. E' EQUIVALENTE:

(i) $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{N} A \sim \bigoplus_{i=1}^{M} B$

(ii) $A \sim B$ e $M = N$,

DOVE $\sim$ SIGNIFICA UNITARIAMENTE EQUIVALENTE E $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{N} A$ SIGNIFICA $A = A \oplus \dots \oplus A$ N VOLTE.

8.25 DEFINIZIONE

Sia A un operatore autoaggiunto limitato; diremo che A è di molteplicità uniforme N se esiste un operatore autoaggiunto limitato senza molteplicità B tale che

$$A = \bigoplus_{i=1}^{N} B.$$

ossiamo adesso formulare la versione ottimale della teoria della riduzione.

.26 TEOREMA

SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT SEPARABILE E $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO.
SISTONO $\widehat{d\mu_\infty}, \widehat{d\mu_1}, \widehat{d\mu_2}$ ..., CLASSI DI MISURA REGOLARI SU $\sigma(A)$ TALI CHE

1. $d\mu_i$ E $d\mu_j$ SONO MUTUAMENTE SINGOLARI SE $d\mu_i \in \widehat{d\mu_i}$, $d\mu_j \in \widehat{d\mu_j}$ E $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;

2. A E' UNITARIAMENTE EQUIVALENTE A

$$A_\infty \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$$

DOVE A_i E' DI MOLTEPLICITA' UNIFORME i CON CLASSE DI MISURA $\widehat{d\mu_i}$

A SUCCESSIONE $\widehat{d\mu_\infty}, \widehat{d\mu_1}, \widehat{d\mu_2}, \ldots$ COSTITUISCE UN INVARIANTE UNITARIO COMP
O PER A. LA CLASSE $\widehat{d\mu_\infty} + \widehat{d\mu_1} + \ldots$ E' LA CLASSE DELLE MISURE BASICHE $d\mu$ CARA
ERIZZATA DAL TEOREMA 8.13.

Non diamo la dimostrazione di questi ultimi due teoremi che risolvono completamen
te il problema della struttura di un operatore autoaggiunto. Per delle trattazion
complete della teoria della molteplicità spettrale, di diversa impostazione, si v
dano i testi di Stone (16), Dunford-Schwartz (5) e Nelson (12). Da un punto di v
sta più generale, i teoremi di struttura per gli operatori autoaggiunti sono casi
particolari della teoria di struttura delle algebre di von Neumann abeliane e di
tipo I (3, Cap.I, § 7,8 e Cap. III § 3).

Prendiamo in considerazione due operatori A_1, A_2 autoaggiunti limitati dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e siano $_i$ gli omomorfismi .

$$\pi_i : f \in \mathcal{C} \longrightarrow f(A_i) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \qquad i = 1,2;$$

per il teorema di Gelfand-Naimark π_1 e π_2 hanno lo stesso nucleo se e solo se A_1 e A_2 hanno lo stesso spettro, cioè, detta $\mathfrak{A}_i$ la C^*-algebra generata da A_i, I, sono equivalenti:

(i) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$,

(ii) esiste uno *isomorfismo ρ di $\mathfrak{A}_1$ sù $\mathfrak{A}_2$ tale che $\rho(A_1) = A_2$.

Sia inoltre $\mathcal{H}$ separabile; se $\mathcal{R}_i = \mathfrak{A}_i'' = \overline{\mathfrak{A}_i}^{deb}$ denota l'algebra di von Neumann generata da A_i si dimostra (2, ch V, prop. 5.3.1. e 3 append.IV) che sono equivalenti:

(i) ρ si estende in uno *isomorfismo di $\mathcal{R}_1$ su $\mathcal{R}_2$,

(ii) A_1 e A_2 hanno misure basiche equivalenti,

(iii) $A_1 \oplus A_1 \oplus \ldots\ldots \cong A_2 \oplus A_2 \oplus \ldots$, ove

"$\cong$" significa unitariamente equivalente e la somma diretta è composta di una infinità numerabile di copie.

Da quanto visto appare chiaro come il problema della classificazione degli operatori autoaggiunti sia collegato al problema della classificazione per le algebre di von Neumann: se A è un operatore autoaggiunto dello spazio di Hilbert separabile , l'algebra di von Neumann $\mathcal{M}$ commutante di A, cioè

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}' = \{A\}'$$

con $\mathcal{R}$ l'algebra di von Neumann generata da A, è di "tipo I" (ovvero "discreta", cf. 3, ch I e III); viceversa ogni algebra di von Neumann di tipo I su uno spazio di Hilbert separabile è isomorfa al commutante di un opportuno operatore autoaggiunto limitato.

La decomposizione di $\mathcal{H}$ in sottospazi ortogonali che riducono A in parti molteplicità uniforme n si ottiene riducendo $\mathcal{M}$ in parti $\mathcal{M}_n$ omogenee di grado n, cioè $\mathcal{M}_n$ è isomorfa all'algebra di von Neumann prodotto tensoriale di un'algebra di von Neumann abeliana e dell'algebra di tutti gli operatori limitati su uno spazio di Hilbert di dimensione n.

BIBLIOGRAFIA DELLA PARTE II[a]

1. F.F. BONSALL, J. DUNCAN: "Complete Normed Algebras" Springer, New York (1973).
2. J. DIXMIER: "Les C^*-Algebres et leurs Representations" Gauthier Villars, Paris (1969).
3. J. DIXMIER: "Les Algebres d'Operateurs dans les Espaces Hilbertiens" Gautier Villars, Paris (1969).
4. R.G. DOUGLAS: "Banach Algebras Techniques in Operator Theory" Academic Press, New York (1972).
5. N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ: "Linear Operators" Interscience, New York I(1958), II(1963).
6. S. GOLDBERG "Unbounded Linear Operators" McGraw Hill, London (1966).
7. R.V. KADISON: "Lectures in Operator Algebras" Cargése Lectures in Theoretical Physics, New York (1967).
8. E. HILLE, R.S. PHILLIPS: "Functional Analysis and Semigroups" Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Providence (1957).
9. T. KATO: "Perturbation Theory for Linear Operators" Springer, New York (1966).
10. G. KÖTHE: "Topological Vector Spaces" Springer, New York (1966).
11. E. NELSON: " Topics in Dynamics" I: Flow, Princeton University Press, Princeton (1969).
12. A. PIETSCH: "Nuclear Locally Convex Spaces" Springer, New York (1972).
13. M. REED, B. SIMON: "Methods of Modern Mathematical Physics" Academic Press, New York I (1972), II (1975).
14. F. RIESZ, B. SZNAGY: "Functional Analysis" Ungar, New York (1956).
15. C.E. RICKART: "General Theory of Banach Algebras" Van Nostrand, London (1960).
16. M.H. STONE: "Linear Transformation in Hilbert Spaces" Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 15, Providence (1932).
17. G.L.H. LOOMIS: An Introduction to Abstract Harmonic Analysis" Van Nostrand, Princeton (1953).
18. M.A. NAIMARK "Normed Algebras" Noordhoff, Groningen (1972).
19. W. RUDIN: "Analisi Reale e Complessa" Boringhieri (1974).
20. R.V. KADISON, J.E. RINGROSE: "Fundamentals of Operator Algebras" I, II - Academic