1. DIARIO DELLE LEZIONI

28 settembre: Informazioni generali e presentazione. Insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Rappresentazione sulla retta. Non esistenza della radice quadrata di 2 in $\mathbb{Q}$. Sommatoria. Progressione geometrica e calcolo della somma. Fattoriale di un numero naturale. Coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton. Presentazione assiomatica di $\mathbb{R}$, assiomi di campo totalmente ordinato.

29 settembre: Massimo e minimo di un sottinsieme di $\mathbb{R}$. Unicità. Maggiorante, estremo superiore. Unicità. Esempi. Insiemi superiormente limitati. Intervalli in $\mathbb{R}$. Esempi di insiemi illimitti. Assioma di continuità di $\mathbb{R}$. Principio di Archimede. Esercizi sulle sommatorie e progressione geometrica. Valore assoluto e disuguaglianza triangolare.

30 settembre: Ancora sulla disuguaglianza triangolare e sul principio di Archimede. Parte intera di un numero reale e sua costruzione. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Radici n-me dei numeri non negativi (s.d.). Potenze ad esponente razionale. Cardinalità e numerabilità di un insieme. Corrispondenza biunivoca. Numerabilità di $\mathbb{Z}$. Prodotto di insiemi numerabili è numerabile. Un sottoinsieme di un insieme numerabile è numerabile. Numerabilità di $\mathbb{Q}$. Non numerabilità di $\mathbb{R}$.

5 ottobre: Ancora sulla non numerabilità di $\mathbb{R}$. Principio degli intervalli incapsulati e relazione con l'assioma dell'estremo superiore. Prima dimostrazione di Cantor sulla non numerabilità dell'intervallo $[0, 1]$. Cardinalità del continuo. Proiezioni stereografiche da $(-1, 1)$ a $\mathbb{R}$. Tutti gli intervalli hanno la cardinalità del continuo (dim solo per gli intervalli aperti). Principio di induzione, esercizi. Numeri complessi e struttura di campo.

6 ottobre: Campo dei numeri complessi. Forma cartesiana. Rappresentazione geometrica nel piano cartesiano. Interpretazione della somma. Coniugato e modulo di un numero complesso e proprietà (formule di De Moivre). Disuguagianza triangolare. Decomposizione polare (forma trigonometrica). Modulo, argomento e argomento principale. Notazione esponenziale. Interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi di modulo 1. Potenze. Radici n-me dei numeri complessi. Esercizi vari.

7 ottobre: Teorema fondamentale dell'algebra (sd). Funzioni, dominio, condominio, insieme immagine, immagine di un punto. Esempi. Funzioni limitate, maggiorante e minorante per una funzione, estremo superiore ed inferiore di una funzione sul dominio. Esempi. Simmetrie: funzioni pari, dispari e periodiche. Esempi. Funzioni monotone e strettamente monotone (crescenti, decrescenti, strettamente crescenti e strettamente decrescenti). Relazione con l'iniettività. Esempio di funzione iniettiva non strettamente monotona. Funzioni potenza ad esponente razionale sul dominio naturale e loro grafici.

12 ottobre: Funzione esponenziale; Proprietà della funzione esponenziale sui razionali, dimostrazione della proprietà di omomorfismo. Estensione per continuità sui reali ed estensione delle proprietà. Immagine della funzione esponenziale (la dim verrà fatta in seguito). Funzioni invertibili e funzione inversa. Dominio, immagine e grafico dell'inversa. Funzione logaritmo e principali proprietà. Misura di un angolo in radianti. Definizione geometrica delle funzioni trigonometriche, loro grafici. Formula di addizione. Funzione tangente. Funzione parte intera e mantissa. Esponenziale con base numero di Nepero (da finire). Funzioni iperboliche e loro principali proprietà. Dominio, immagine e grafico. Inverse delle funzioni iperboliche su opportuni domini. Operazioni su grafici. Traslazioni verticali ed orizzontali, dilatazioni verticali e orizzontali.

13 ottobre: Ancora sulle inverse delle funzioni iperboliche e trigonometriche su opportuni domini e loro grafici. Calcolo esplicito nel caso delle funzioni iperboliche. Successioni e loro estratte. Successioni limitate, estremo superiore e inferiore di una successione. Limite finito di una successione. Esempi: limiti di $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^k}$. Confronto: se $|a_n| \le |b_n|$ e b_n tende a 0 allora lo stesso

vale per a_n. Calcolo del limite di $2^{1/n}$ senza usare l'immagine della funzione esponenziale. Limite da sopra o da sotto. Unicità del limite. Limiti infiniti. Esempi: n, n^k, 2^n. Relazione tra i limiti $+\infty$ e 0^+ di una successione e della sua reciproca. Caso analogo per $-\infty$ e 0^-. Calcolo del limite della successione esponenziale a^n per tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$. Relazione tra limitatezza e convergenza per una successione. Esempio di successione limitata non convergente. Le successioni monotone crescenti e superiormente limitate convergono al loro estremo superiore. Se illimitate superiormente, divergono positivamente. Esercizi del libro sulle funzioni.

14 ottobre: operazioni sui limiti. Forme indeterminate. Limiti di polinomi e loro quozienti (successioni razionali). Successione approssimante il numero di Nepero. Teorema di esistenza del limite.

19 ottobre: Ancora sulle operazioni tra i limiti. Caso di limiti infiniti. Reciprocità tra successioni infinitesime e successioni che divergono in valore assoluto. Forme indeterminate. Teoremi di confronto. Teorema dei carabinieri. Prodotto di una successione limitata e una infinitesime è infinitesima. Esempio: Densità di $\sin(n)$ in $[-1,1]$ (cenni). Non esistenza del limite di $\sin(n)$. Infinitesimalità di $\frac{\sin(n)}{n}$. Somma di una successione divergente positivamente e di una inferiormente limitata è divergente. Analogamente per in caso $-\infty$. Richiami sui limiti di n^α e a^n con $\alpha, a \in \mathbb{R}$. Criterio del rapporto per successioni per l'infinitesimalità. Confronto tra infiniti: calcolo del limite di $\frac{a^n}{n!}$. Limite di $\frac{a^n}{n}$, $a > 1$, sia mediante la formula di Newton che con il criterio del rapporto. Generalizzazione per $\frac{a^n}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Ordini di infinito. Limite di $\frac{\log(n)}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

20 ottobre: Ancora sul limite $\lim \frac{\log(n)}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$. Stima $2^x > x$. Ancora su criterio del rapporto per successioni. Casi di limite $\ell < 1$ oppure $\ell > 1$. Maggiorazione di $\frac{n!}{n^n}$ con una successione esponenziale. Ordini di infinito e di infinitesimo e vari esempi. Stima asintotica ed esempi. Limiti notoveli di $\frac{\sin(a_n)}{a_n}$ e $\frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2}$ con a_n infinitesima. Limite di $n^{1/n}$ con lo sviluppo di Newton (dimostrazione indipendente dalla continuità della funzione esponenziale). Esercizi sui limiti. Esercizi sui numeri complessi.

21 ottobre: Serie numeriche. Serie geometrica; serie telescipica; serie armonica. Condizione necessaria di convergenza. Esempio. Serie a termini non negativi. Serie armonica generalizzata. Criterio del confronto termine a termine.

26 ottobre: Ancora sulle serie e sul criterio del confronto termine a termine. Criterio del confronto asintotico. Esempi con $\sum \sin(1/n)$ e $\sum(1-\cos(1/n))$. Nuovi limiti notevoli: limiti di a^{b_n} e $\log_a(b_n)$ con b_n convergente, di $(1+\frac{1}{b_n})^{b_n}$ con $|b_n| \to +\infty$; di $\frac{\log(1+a_n)}{a_n}$ e $\frac{e^{a_n}-1}{a_n}$ con a_n infinitesima. Altri esercizi sul criterio del confronto per serie a termini positivi basati su questi limiti. Criterio del rapporto e della radice (da finire). Esempio.

27 ottobre: Ancora sul criterio della radice per serie a termini non negativi. Fallimento dei vari criteri finora studiati ai fini dello studio della serie $\sum_n \frac{1}{n\log(n)}$. Criterio di condensazione di Cauchy. Esercizi di riepilogo sulle serie a termini non negativi. Serie reali a termini di segno variabile. Criterio di convergenza di Leibniz. Esercizi. Convergenza assoluta. Criterio di convergenza assoluta (da finire). Esercizi su serie dipendenti da parametro (serie di funzioni).

28 ottobre: Teorema di Bolzano-Weierstrass. Successioni di Cauchy. Criterio di Cauchy e sua equivalenza con la convergenza. Criterio di convergenza assoluta per serie. Esercizi sulle serie.

2 novembre: Limite di funzione in un punto, definizione funzionale. Esempio. Teorema ponte. Non esistenza del limite di $\sin(1/x)$ in 0. Calcolo del limite di a^x in ogni punto x_0 con il teorema ponte. Limite di polinomi di primo grado con la definizione. Operazioni con i limiti. Limiti infiniti in un punto. Estensione delle operazioni al caso di limiti infiniti. Teoremi di confronto, dei carabinieri e della permanenza del segno. Limiti di polinomi e delle funzioni razionali in un punto. Limiti di $\cos(x)$ e $\sin(x)$ in un punto.

3 novembre: Altri limiti notevoli di $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$, $\frac{\tan(x)}{x}$, $\frac{\arctan(x)}{x}$ per $x \to 0$. Esistenza del limite unilatero in un punto per funzioni monotone e suo calcolo. Calcolo del limite di una funzione in un punto x_0 tramite la verifica su una fissata successione convergente a x_0. Calcolo del limite della funzione esponenziale in ogni punto del dominio. Limiti notevoli derivati dal numero di Nepero: $\lim(1+x)^{1/x}$, $\lim \frac{\log(1+x)}{x}$, $\lim \frac{e^x-1}{x}$, $\lim \frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ per $x \to 0$ (assumendo la continuità della funzione logaritmo). Esercizi sui limiti notevoli. Notazione di asintoticità tra funzioni e suo uso nel calcolo dei limiti e nello studio delle serie a termini positivi. Limiti finiti o infiniti all'infinito. Gerarchia degli infiniti per funzioni. Esercizi. Continuità di una funzione in un punto e in un insieme. Esempi di funzioni continue nel dominio: polinomi, funzioni razionali, trigonometriche, esponenziale. Classificazione delle discontinuità. Esempi. Teorema della permanenza del segno per funzioni continue. Operazioni tra funzioni continue. Teoremi di Weierstrass e di esistenza degli zeri. Teorema dei valori intermedi.

4 novembre: Equivalenza tra iniettività e stretta monotonia per una funzione continua in un intervallo. Esempi che mostrano che la necessità delle ipotesi nel teorema di Weierstrass. Inverso del teorema dei valori intermedi per funzioni continue e monotone definite su intervalli. Continuità dell'inversa di una funzione strettamente monotona su un intervallo. Calcolo dell'immagine di a^x. Continuità di $\log_a(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$. Esercizi.

9 novembre: Esercizio sulla ricerca degli zeri di una funzione continua. Esercizio sull'esistenza del massimo e minimo di una funzione continua su $\mathbb{R}$. Rapporto incrementale. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica. Insieme di derivabilità e funzione derivata. Calcolo della derivata per le funzioni x, x^2, x^α nei loro domini. Derivata di una funzione dispari. Derivata di $1/x$ nel dominio, e di $\sin(x)$ e $\cos(x)$, e^x, $\log(x)$. Punto angoloso, esempio.

10 novembre: Punto angoloso, punto di flesso a tangente verticale, cuspide. Applicazione a x^α in 0 per vari valori di α. Continuità e derivabilità di x^α. Esempio di una funzione periodica continua non derivabile ovunque. Prolungamento per continuità di una funzione in un punto, eventualmente solo unilatero. Esempi: $x\log(x)$ e $e^{-1/x}$ in 0. Regole di calcolo delle derivate. Funzioni composte. Continuità della funzione composta. Derivabilità della funzione composta e calcolo della derivata. Esempi. Derivata di a^x. Derivata di $f(x)^{g(x)}$. Derivabilità di $|f(x)|$ nei punti in cui f è derivabile. Derivabilità di $\log(|x|)$ nel dominio e calcolo della sua derivata. Derivata logaritmica.

11 novembre: Esercizi su cuspidi, punti angolosi, flessi verticali, e su derivata di funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivata di $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$. Esercizi dal testo. Massimo e minimo locale e questioni di non unicità. Teorema di Fermat. Esempi di massimi e minimi locali assunti in punti di non derivabilità oppure agli estremi di un intervallo.

16 novembre: Ancora sul teorema di Fermat. Teoremi di Rolle e di Lagrange. Applicazioni: relazione tra monotonia o monotonia stretta e derivata prima in un intervallo. Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla. Applicazione allo studio dei punti di massimo e minimo relativo interni di derivabilità. Punti di flesso a tangente orizzontale. Uno schema per lo studio di funzione. Esempio di studio di funzione. Applicazione alla derivabilità in un punto speciale come limite dei valori della derivata prima in un intorno (s.d.). Esempio. Teorema di Cauchy (idea di dimostrazione).

17 novembre: Ancora sul teorema di Cauchy. Teoremi di de l'Hospital, idea di dimostrazione. Esercizi. Insiemi convessi del piano. Esempi con spigoli. Parametrizzazione di un segmento noti gli estremi. Convessita' di una funzione in intervallo. Funzioni concave. Continuità automatica di una funzione convessa nei punti interni di un intervallo (s.d.). Caratterizzazione della convessità in un intervallo per funzioni derivabili una volta o due volte. Caratterizzazione mediante le rette tangenti. Punto di flesso a tangente obliqua. Studio del grafico di una funzione. Esempio.

18 novembre: Formula di Taylor con il resto di Peano. Calcolo dei polinomi di Taylor per le funzioni e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\log(1+x)$.

23 novembre: Ancora sulla formula di Taylor con il resto di Peano. Simboli di Landau. Esempi. Sviluppi delle funzioni $\frac{1}{1+x^2}$ e $\arctan(x)$ in 0. Uso nel calcolo di limiti di forme indeterminate. Esercizi. Forma di Lagrange del resto (s.d.). Uso nelle stima del resto in problemi di approssimazione di funzioni su intervalli dati e ordine dato. Uso nella approssimazione con valutazione dell'errore data.

24 novembre: Ancora sulla stima del resto di Lagrange per funzioni con derivata limitata. Integrazione secondo Riemann per funzioni limitate: partizioni, somme inferiori e superiori, proprietà di monotonia, integrale inferiore e superiore. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e caratterizzazione mediante le somme inferiori e superiori. Integrabilità delle funzioni monotone. Integrabilità delle funzioni continue (s.d.). Proprietà degli integrali: linearità, valore assoluto, composizione e prodotto di funzioni. Additività dell'integrale rispetto all'intervallo (s.d.). Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni continue. Primitive di una funzione in un intervallo. Calcolo degli integrali definiti. Integrali immediati e integrali di funzioni composte. Esercizi sugli integrali immediati. Integrale indefinito. Esercizi sugli sviluppi di Laurent. Ordine di infinitesimo ed esercizi.

25 novembre: Integrazione per decomposizione in somma. Esempi. Integrazione di prodotti di funzioni trigonometriche, e di polinomi trigonometrici. Metodo di integrazione per parti e per sostituzione. Esercizi. Esercizio su ordine di infinitesimo.

30 novembre: Integrazione di funzioni razionali. Esercizi.

1 dicembre: ancora sull'integrazione di funzioni razionali. Integrazione di funzioni razionali di $\sin(x)$ e $\cos(x)$, e di alcune funzioni irrazionali: Le funzioni razionali di x e di $\sqrt{a^2 - x^2}$, oppure di x e di $\sqrt{x^2 - a^2}$, oppure di x e di $\sqrt{x^2 + a^2}$. Inoltre funzioni razionali di x e di un numero finito di potenze $x^{m/n}$ con m e n interi. Integrali impropri (generalizzati) di funzioni continue su domini illimitati $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$. Esempio fondamentale: intgrabilità di $1/x^\alpha$. Relazione tra integrali impropri di funzioni non negative, decrescenti e positive con le serie. Criterio del confronto per funzioni non negative (s.d.). Confronto asintotico. Esercizi su integrali impropri, sia mediante l'uso della definizione che con il criterio del confronto.

2 dicembre: Integrali impropri su intervalli limitati. Caso di funzioni non negative. Monotonia della funzione integrale. Criterio di confronto e di confronto asintotico. Integrabilità delle funzioni $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$. Criterio di convergenza assoluta (s.d.). Esercizi.

9 dicembre: Equazioni differenziali ordinarie di ordine n in forma normale. Coefficienti e termine noto. Equazioni omogenee. Definizione di integrale generale per un'equazione lineare con coefficienti definiti su un *intervallo*. Esempi di calcolo dell'integrale generale per le equazioni $y' = y$, $y' = ay$ con a costante, $y' = xy$, $y' = a(x)y$ con $a(x)$ funzione continua in un intervallo. Differenza di soluzioni di un'equazione lineare è soluzione dell'equazione omogenea associata. L'integrale generale di un'equazione lineare è somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare della non omogenea. Metodo di variazione della costante arbitraria per determinare una soluzione particolare di $y' = a(x)y + b(x)$ visto sull' esempio $y' = y + 1$. Relazione tra le equazioni di secondo ordine e il secondo principio della dinamica. Condizioni iniziali e loro significato nelle applicazioni fisiche. Problema di Cauchy per un'equazione lineare di ordine n. Teorema di esistenza e unicità globale del problema di Cauchy in caso di coefficienti continui.

14 dicembre: Ancora sulle equazioni lineari del primo ordine e sul teorema di esistenza e unicità‘ globale per equazioni lineari di ordine n in forma normale e coefficienti continui (s.d.). Corollario sulla dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni nel caso omogeneo (cenno di dimostrazione). Equazioni omogenee di secondo ordine a coefficienti costanti e loro integrale generale.

15 dicembre: Integrale generale di un'equazione omogenea a coefficienti costanti di ordine n. Equazione di primo ordine a variabili separabili e suo integrale generale. Ricerca di una

soluzione particolare nel caso non omogeneo di ordine 2: metodi di somiglianza, con e senza risonanza, e metodo di variazione delle costanti arbitrarie. Esercizi.

16 dicembre: Equazioni differenziali che si abbassano di ordine. Cenni al teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy di un'equazione differenziale di primo ordine. Esercizi.

21 dicembre: Esercitazione di riepilogo.

22 dicembre: Esercitazione di riepilogo.