EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizi con soluzione

1. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

   (a) $y' - 2y = 1$

   (b) $y' + y = e^x$

   (c) $y' - 2y = x^2 + x$

   (d) $3y' + y = 2\,e^{-x}$

   (e) $y' + 3y = e^{ix}$

   (f) $y' + 3y = \cos x$

   (g) $y' + 2xy = x$

   (h) $xy' + y = 3x^3 - 1 \quad (x > 0)$

   (i) $y' + e^x y = 3e^x$

   (j) $y' - (\tan x)y = e^{\sin x} \quad (-\pi/2 < x < \pi/2)$

   (k) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

   (l) $y' + (\cos x)y = \sin 2x$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy lineari del primo ordine:

   (a) $\begin{cases} y' + (\cos x)y = e^{-\sin x} \\ y(\pi) = \pi \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y' - 2y = \frac{e^{3x}}{e^x+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} y' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} y' + y = \sin x + 3\cos 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} y' + iy = x \\ y(0) = 2 \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} y' - y = e^{-ix} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} y' = (\cos x)y + \cos^3 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3. (a) Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione differenziale $x^2y' + 2xy = 1$ nell'intervallo $x > 0$ tende a zero per $x \to +\infty$.

   (b) Calcolare la soluzione y che soddisfa $y(2) = 2y(1)$.

4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili specificando, ove possibile, l'intervallo massimale I delle soluzioni:

   (a) $y' = x^2 y$

   (b) $yy' = x$

   (c) $y' = \frac{x+x^2}{y-y^2}$

   (d) $y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x}$

   (e) $y' = x^2y^2 - 4x^2$

5. (a) Utilizzando il teorema di esistenza e unicità, dimostrare che il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha soluzione unica per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Dimostrare che la soluzione è

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}.$$

   (Si noti che per $y_0 = 0$ si ottiene la soluzione costante $y = 0$.)

   (c) Determinare l'intervallo massimale della soluzione in funzione del dato iniziale y_0.

6. (a) Utilizzando il teorema di esistenza e unicità, dimostrare che il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha soluzione unica per ogni $y_0 > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare la soluzione massimale.

   (c) Dimostrare che il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(x_0) = 0$ ha più di una soluzione, esibendo almeno 2 soluzioni distinte.

Gli esercizi 7 e 8 riguardano il metodo delle approssimazioni successive per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Ricordiamo che le approssimazioni successive per il problema (1) sono le funzioni $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ definite da

$$\phi_0(x) = y_0, \qquad \phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{n-1}(t))\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Sotto opportune ipotesi sulla funzione $f(x, y)$ (f continua e Lipschitziana in un rettangolo chiuso del tipo $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$) si dimostra che le $\phi_n(x)$ convergono per $n \to \infty$ ad una soluzione $\phi(x)$ del problema (1) per ogni x in un intorno di x_0 e che tale soluzione è unica.

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3y + 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

   (a) Calcolare le prime 4 approssimazioni successive ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3.

   (b) Calcolare la soluzione esatta.

(c) Confrontare i risultati ottenuti in a) e in b).

8. Per ognuno dei seguenti problemi di Cauchy calcolare le prime 4 approssimazioni successive ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3:

   (a) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$
   (b) $y' = 1 + xy, \quad y(0) = 1$
   (c) $y' = y^2, \quad y(0) = 0$
   (d) $y' = y^2, \quad y(0) = 1$
   (e) $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$
   (f) $y' = 1 - 2xy, \quad y(0) = 0.$

9. Calcolare l'integrale generale (reale se i coefficienti sono reali) delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine:

   (a) $y'' - 4y = 0$
   (b) $3y'' + 2y' = 0$
   (c) $y'' + 16y = 0$
   (d) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$
   (e) $y'' - 4y' + 5y = 0$
   (f) $y'' + 2iy' + y = 0$
   (g) $y'' - 2iy' - y = 0$
   (h) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0.$

10. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$
   (b) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$
   (c) $y'' + 10y = 0, \quad y(0) = \pi, \ y'(0) = \pi^2.$
   (d) $y'' + (4i + 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$
   (e) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 0$

11. Calcolare l'integrale generale (reale se i coefficienti sono reali) delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti:

   (a) $y''' + y = 0$
   (b) $y''' - 8y = 0$
   (c) $y^{(4)} - 16y = 0$
   (d) $y^{(4)} + 16y = 0$
   (e) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$
   (f) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
   (g) $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$
   (h) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

(i) $y^{(4)} + y' = 0$

(j) $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$

(k) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$

(l) $y^{(5)} + y = 0$

(m) $y^{(6)} + y = 0$

(n) $y^{(6)} - y = 0$

(o) $y^{(8)} + 8y^{(6)} + 24y^{(4)} + 32y'' + 16y = 0$

(p) $y^{(10)} = 0$

(q) $y''' - 5y'' + 6y' = 0$

(r) $y^{(100)} + 100y = 0$

(s) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$

(t) $y''' - 3y' - 2y = 0$

(u) $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0$

(v) $y''' - 3iy'' - 3y' + iy = 0$

(w) $y''' - iy'' + 4y' - 4iy = 0$

(x) $y''' + iy'' - 2y' - 2iy = 0$

(y) $y^{(4)} - iy = 0$

(z) $y^{(4)} + 4iy''' - 6y'' - 4iy' + y = 0$

12. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $y''' + y = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \;\; y''(0) = 0$

(b) $y''' - 4y' = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \;\; y''(0) = 0$

(c) $y^{(4)} + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

(d) $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$

13. Calcolare la funzione analitica

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

in termini di funzioni elementari. (Suggerimento: usando il teorema di derivazione per serie si dimostri che y soddisfa l'equazione differenziale $y''' - y = 0$, con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.)

14. Calcolare la funzione analitica

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \cdots$$

in termini di funzioni elementari.

15. Dimostrare che se $k \in \mathbb{N}^+$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn}}{(kn)!} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\alpha_j x}, \quad \text{dove} \quad \alpha_j = \sqrt[k]{1} = e^{i\frac{2\pi j}{k}} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1).$$

16. Utilizzando il metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare $y_p(x)$ delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee del secondo ordine:

   (a) $y'' + 4y = \cos x$
   (b) $y'' + 4y = \sin 2x$
   (c) $y'' - 3y' + 2y = x^2$
   (d) $4y'' - y = e^x$
   (e) $6y'' + 5y' - 6y = x$
   (f) $y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x}$
   (g) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$
   (h) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$
   (i) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
   (j) $y'' - y' - 2y = e^{-x} + x^2 + \cos x$
   (k) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + \cos 3x$
   (l) $y'' + y = xe^x \cos 2x$
   (m) $y'' + 2iy' + y = x$
   (n) $y'' - 2iy' - y = e^{ix} - 2e^{-ix}$
   (o) $y'' + iy' + 2y = 2 \operatorname{ch} 2x + e^{-2x}$

17. Utilizzando il metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare $y_p(x)$ delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee:

   (a) $y''' - y' = x$
   (b) $y''' - 8y = e^{ix}$
   (c) $y''' - 8y = \cos x$
   (d) $y''' - 8y = \sin x$
   (e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2 e^{-x}$
   (f) $y''' = x^2 + e^{-x} \sin x$
   (g) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = xe^x \sin x$
   (h) $y^{(4)} + 16y = \cos x$
   (i) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = e^x$
   (j) $y^{(4)} - y = e^x$
   (k) $y^{(4)} - y = e^{ix}$
   (l) $y^{(4)} - y = \cos x$
   (m) $y^{(4)} - y = \sin x$

(n) $y^{(4)} - y = e^x \cos x$

(o) $y^{(4)} - y = xe^x \sin x$

18. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2\, e^{3x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' - y = x\, e^x \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y''' + y'' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y''' + y'' + y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

19. Utilizzando il metodo della risposta impulsiva risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y'' + y = \tan x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\sin x} \\ y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$

(i) $\begin{cases} y'' - y' = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(j) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{1+\cos x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(k) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0. \end{cases}$

(l) $\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x+1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$

(m) $\begin{cases} y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^x}{e^x+1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$

(n) $\begin{cases} y''' + 4y' = \frac{1}{\sin 2x} \\ y(\pi/4) = y'(\pi/4) = y''(\pi/4) = 0. \end{cases}$

20. Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili

$$y'' + \tfrac{1}{x}y' - \tfrac{1}{x^2}y = 0 \quad \text{per } x > 0.$$

(a) Dimostrare che ci sono soluzioni della forma x^r con r costante.

(b) Trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti per $x > 0$ dimostrando la loro indipendenza lineare.

(c) Determinare le 2 soluzioni che soddisfano le condizioni iniziali $y(1) = 1, \; y'(1) = 0$ e $y(1) = 0, \; y'(1) = 1$.

21. (a) Dimostrare che ci sono soluzioni della forma x^r con r costante dell'equazione differenziale

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

(b) Determinare 3 soluzioni linearmente indipendenti per $x > 0$ dimostrando la loro indipendenza lineare.

22. In ognuno dei seguenti casi viene data un'equazione differenziale, una funzione $y_1(x)$ e un intervallo. Verificare che y_1 soddisfa l'equazione nell'intervallo indicato, e trovare una seconda soluzione linearmente indipendente utilizzando il metodo di riduzione dell'ordine.

(a) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0, \quad y_1(x) = x^3 \quad (x > 0)$.

(b) $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0)$.

(c) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0, \quad y_1(x) = e^{x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

(d) $xy'' - (x+1)y' + y = 0, \quad y_1(x) = e^x \quad (x > 0)$.

(e) $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y_1(x) = 1 \quad (-1 < x < 1)$.

(f) $x^2y'' + y' - \frac{1}{x}y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0)$.

(g) $x^2y'' - \frac{1}{2}xy' - y = 0, \quad y_1(x) = x^2 \quad (x > 0)$.

(h) $x^2y'' + xy' - y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0)$.

(i) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0)$.

(j) $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0, \quad y_1(x) = x^2 \quad (x > 0)$.

(k) $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0, \quad y_1(x) = x^{1/2} \quad (x > 0)$.

(l) $y'' - \frac{1}{x\log x}y' + \frac{1}{x^2\log x}y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 1)$.

(m) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0\,,\quad y_1(x) = 1/x\quad (x > 0)$.

(n) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0\,,\quad y_1(x) = x\quad (-1 < x < 1)$.

23. Utilizzando il metodo della variazione delle costanti determinare una soluzione particolare delle seguenti equazioni differenziali lineari non omogenee.

(a) $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}$ (si veda l'esercizio 22 (d)).

(b) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 2x^3$ (si veda l'esercizio 22 (i)).

(c) $y'' - \frac{2}{x^2}y = x$ (si veda l'esercizio 22 (j)).

24. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = x^2 \\ y(1) = 1,\;\; y'(1) = 0 \end{cases}$ (si veda l'esercizio 22 (b)).

(b) $\begin{cases} x^2y'' - 2y = 2x - 1 \\ y(1) = 0,\;\; y'(1) = 0 \end{cases}$ (si veda l'esercizio 22 (j)).

(c) $\begin{cases} y'' - \frac{1}{x\log x}y' + \frac{1}{x^2\log x}y = \log x \\ y(e) = 0,\;\; y'(e) = 0 \end{cases}$ (esercizio 22 (l)).

25. (a) Determinare 2 soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 0$$

nell'intervallo $x > 0$, cercandole nella forma $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$.

(b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = x^2.$$