FABIO SCARABOTTI

Note sulle equazioni differenziali ordinarie

Ingegneria Meccanica - Corso di Analisi Matematica I - Canale L-Z

Introduzione. L'esempio più semplice di equazione differenziale è dato dal problema dell'integrazione indefinita: data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo I, determinare tutte le funzioni $y \in C^1(I)$ tali che

$$y'(x) = f(x), \tag{1}$$

per ogni $x \in I$. Risolvere (1) equivale a integrare f: la formula

$$y(x) = \int f(x)dx + C \tag{2}$$

fornisce, al variare di $C \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni di (1). L'espressione (2) è chiamata *integrale generale* di (1). Alternativamente, si può usare un integrale definito: fissato $x_0 \in I$ e scelto un valore $y_0 \in \mathbb{R}$, la formula

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0$$

fornisce la soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3}$$

dove $y(x_0) = y_0$ viene chiamata *condizione iniziale* o *di Cauchy*. Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ si ottengono ancora tutte le soluzioni di (1). Come vedremo, è naturale imporre condizioni iniziali alle equazioni differenziali e quindi studiare problemi come (3).

Come secondo esempio di equazione differenziale ordinaria, consideriamo il seguente: dato un numero $a \in \mathbb{R}$, determinare tutte le funzioni $y \in C^1(\mathbb{R})$ tali che

$$y'(x) = ay(x), \tag{4}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. E' facile vedere che ogni funzione del tipo $y(x) = Ce^{ax}$, con $C \in \mathbb{R}$, è una soluzione di (4): $y'(x) = Cae^{ax} = ay(x)$. Però dobbiamo essere sicuri di aver trovato *tutte* le soluzioni di (4). Per raggiungere tale scopo useremo un semplice trucco, detto moltiplicazione per un fattore integrante. Moltiplicando ambo i membri di (4) per il fattore e^{-ax} (mai nullo) e portando tutto a primo membro, troviamo l'equazione equivalente:

$$y'e^{-ax} - ae^{-ax}y = 0. \tag{5}$$

Il primo membro di (5) è una derivata: $\frac{d}{dx}[ye^{-ax}] = y'e^{-ax} - aye^{-ax}$. Quindi possiamo riscrivere (5) nella forma:

$$\frac{d}{dx}[ye^{-ax}] = 0$$

che si risolve immediatamente: una funzione ha derivata nulla in un intervallo se e soltanto se è costante. Quindi dobbiamo avere $ye^{-ax} = C$, con $C \in \mathbb{R}$ costante, e

$$y(x) = Ce^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

é l'integrale generale di (4).

L'equazione (4), seppur semplicissima, si incontra in molte situazioni concrete. Consideriamo un semplice esempio. Un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse delle x soggetto solo a una forza resistente (attrito), direttamente proporzionale alla velocità. Tale problema porta alla seguente equazione:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv. \tag{7}$$

L'equazione (7) segue dal secondo principio della dinamica. Infatti, il primo membro è il prodotto della massa per l'accelerazione $\frac{dv}{dt}$, mentre il secondo membro rappresenta la forza d'attrito: k è una costante positiva, e il segno meno è giustificato dal fatto che l'attrito ha verso contrario alla velocità. Quindi la componente lungo l'asse x è negativa se v è positiva, mentre è positiva se v è negativa. Da (6) ricaviamo subito la soluzione generale di (7):

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Per (7) è naturale considerare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = -kv \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{8}$$

dove v_0 è la velocità iniziale del punto materiale. La soluzione è unica ed è data da: $v(t) = v_0e^{-\frac{k}{m}t}$. Quindi la velocità del punto materiale diminuisce in modo esponenziale.

Nei prossimi paragrafi, senza delineare una teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie, discuteremo i metodi risolutivi per alcune classi di equazioni che hanno immediata applicazione in una grandissima varietà di problemi teorici e applicativi.

Equazioni lineari del primo ordine. Supponiamo che $a(x)$ e $f(x)$ siano funzioni continue in un intervallo I. L'equazione

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{9}$$

è detta *equazione lineare del primo ordine*. Si chiama così perché è lineare in y e y' (non compaiono termini come y^2 o $\sin y'$), e perché compaiono solo y e y' (ma non y'' e le derivate successive). Ci occupiamo prima del caso, detto *omogeneo*, in cui $f(x) \equiv 0$.

Teorema 1 La soluzione generale dell'equazione $y' + a(x)y = 0$ è data dalla formula

$$y(x) = Ce^{-A(x)}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$.

Dimostrazione. Si tratta di una immediata generalizzazione del metodo del fattore integrante già usato per (4). Moltiplicando $y' + a(x)y = 0$ per la funzione mai nulla $e^{A(x)}$, e tenendo conto del fatto che $A' = a$ e quindi $\frac{d}{dx}[ye^{A(x)}] = y'e^{A(x)} + ya(x)e^{A(x)}$, otteniamo l'equazione equivalente

$$\frac{d}{dx}[ye^{A(x)}] = 0.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x)e^{A(x)} = C$, ovvero $y(x) = Ce^{-A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$. $\square$

ESEMPIO
Come esempio, risolviamo la semplice equazione $y' + 2xy = 0$. Abbiamo $a(x) = 2x$, $\int a(x)dx = \int 2xdx = x^2 + C$ e prendiamo $A(x) = x^2$. Quindi $e^{-A(x)} = e^{-x^2}$ e la soluzione generale dell'equazione è: $y(x) = Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

Se in (9) la f non è identicamente nulla, allora l'equazione viene detta *non omogenea*, o *completa*.

Teorema 2 La soluzione generale di (9) è data dalla formula

$$y(x) = v_0(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)},$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e $v_0(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)e^{A(x)}$.

Dimostrazione. Useremo il *metodo della variazione della costante arbitraria*, che è anche il metodo pratico più consigliato per la risoluzione delle equazioni lineari del primo ordine. Cerchiamo una soluzione di (9) nella forma

$$y(x) = v(x)e^{-A(x)}, \tag{10}$$

dove $v(x)$ è una *funzione incognita* e $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Derivando (10) otteniamo l'espressione

$$y'(x) = v'(x)e^{-A(x)} - v(x)a(x)e^{-A(x)}. \tag{11}$$

Sostituendo (10) e (11) nel primo membro di (9), otteniamo che questo vale $y'(x) + a(x)y(x) = v'(x)e^{-A(x)} - v(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)v(x)e^{-A(x)} = v'(x)e^{-A(x)}$, e quindi tale equazione è equivalente a

$$v'(x)e^{-A(x)} = f(x), \qquad \text{cioè a} \qquad v'(x) = f(x)e^{A(x)}.$$

Questa si risolve prendendo l'insieme di tutte le primitive di $f(x)e^{A(x)}$. Notando che se $v_0(x)$ è una fissata primitiva tutte le altre sono della forma $v(x) = v_0(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, sostituendo quest'espressione in (10) otteniamo la formula nell'enunciato del teorema. $\square$

ESEMPIO
Illustriamo il metodo della variazione della costante arbitraria con un semplice esempio. Consideriamo l'equazione

$$y' - \frac{1}{x}y = 2x^2 + x. \tag{12}$$

Abbiamo $a(x) = -\frac{1}{x}$, quindi possiamo prendere $A(x) = -\log|x|$ e si ha $e^{-A(x)} = e^{\log|x|} = |x|$. Cerchiamo le soluzioni di (12) nella forma $y(x) = v(x)x$ (per $x < 0$, abbiamo $|x| = -x$, ma il segno meno possiamo assorbirlo nell'incognita $v(x)$; l'equazione si studia separatamente per $x > 0$ e $x < 0$). Si ha $y' = v + xv'$ e quindi il primo membro di (12) vale: $y' - \frac{1}{x}y = v + xv' - \frac{1}{x}xv = xv'$. Allora (12) diventa $xv'(v) = x + 2x^2$, che possiamo scrivere nella forma $v' = 1 + 2x$, determinando immediatamente le sue soluzioni: $v(x) = x + x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Quindi l'integrale generale di (12) è: $y(x) = Cx + x^2 + x^3$, $C \in \mathbb{R}$. Consideriamo anche il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = 2x^2 + x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Per risolverlo basta imporre all'integrale generale la condizione iniziale $y(1) = 3$ (cioè porre $y = 3$ ed $x = 1$), trovando $3 = C \cdot 1 + 1^2 + 1^3$, cioè $C = 1$, e quindi l'unica soluzione è $y(x) = x + x^2 + x^3$.

ESERCIZI
1) Dimostrare che per $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione generale dell'equazione $y' + ay = b$ (*lineare, del primo ordine a coefficienti costanti*) è data da: $y(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$.
2) Immaginiamo che l'asse delle x sia disposto in verticale, orientato verso il basso, e che un punto materiale si muova lungo tale asse soggetto alla forza peso e ad una forza resistente, propozionale alla velocità (*caduta in un mezzo resistente*, o *problema del paracadutista*). L'equazione del moto è: $m\frac{dv}{dt} = -kv + gm$. Risolvere tale equazione usando la formula dell'esercizio 1) dimostrando che l'integrale generale è: $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$, dove $v_0 = v(0)$ è la velocità iniziale.
3) Dimostrare che, per ogni scelta di v_0, si ha: $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$ (*velocità limite*). Qual'è il significato fisico di questa espressione?

Equazioni a variabili separabili. Supponiamo che $f(x)$ e $g(y)$ siano due funzioni continue, f definita nell'intervallo I e g definita nell'intervallo J. L'equazione

$$y' = f(x)g(y) \tag{13}$$

è detta *equazione a variabili separabili.* Tale equazione costituisce il piú semplice esempio di equzione *non lineare* (ed è del primo ordine). Infatti, la funzione $g(y)$ è arbitraria: possiamo avere, ad esempio, $g(y) = y^2$ o $g(y) = \log y$. Ricadiamo nel caso lineare solo se $g(y) = y + C$ (ritroviamo un'equazione lineare omogenea del primo ordine).

Esaminiamo ora il procedimento risolutivo di (13). Per prima cosa osserviamo che se per $\overline{y} \in J$ si ha $g(\overline{y}) = 0$, allora la funzione costante $y \equiv \overline{y}$ è una soluzione di (13). Infatti, in tal caso il primo membro di (13) è nullo perché la derivata di una costante è nulla, mentre il secondo membro è nullo perché si annulla la g. Le soluzioni di questo tipo sono dette *soluzioni costanti*, o *singolari.* Ora esaminiamo il caso generale. Cerchiamo le soluzioni per cui $g(y(x)) \neq 0$: i valori $y(x)$ appartengono a un intervallo $J_0 \subseteq J$ in cui g non si annulla mai (e potrebbe anche essere $J_0 \equiv J$). Possiamo riscrivere la (13) nella forma:

$$\frac{y'(x)}{g[y(x)]} = f(x),$$

e poi integrare membro a membro:

$$\int \frac{y'(x)}{g[y(x)]} dx = \int f(x) dx. \tag{14}$$

Se $G(y)$ è una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$, allora l'integrale a primo membro vale $G[y(x)] + C$ (regola di integrazione per sostituzione, ovvero $\frac{d}{dx} G[y(x)] = G'[y(x)]y'(x) = \frac{y'(x)}{g[y(x)]}$), mentre se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora l'integrale a secondo membro vale $F(x) + C$. Quindi (13) equivale a

$$G[y(x)] = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

L'espressione (15) fornisce le soluzioni in forma *implicita*. Per esplicitarle, bisogna calcolare G^{-1}, la funzione inversa di G (dato che stiamo studiando l'equazione per $y \in J_0$ dove $g(y) > 0$ o $g(y) < 0$, la funzione G sarà strettamente crescente o strettamente decrescente, e quindi invertibile). Tale inversa in generale non sarà elementarmente calcolabile. In conclusione, la soluzione generale di (13) è data da:

$$y(x) = G^{-1}[F(x) + C], \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Il procedimento sopra esposto può essere sintetizzato con la seguente regola pratica: si separano le variabili scrivendo

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx,$$

si calcolano entambi gli integrali e si esplicita (se possibile) rispetto alla y.

ESEMPIO
Come esempio, risolviamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{-2y} \log x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Separando le variabili, si trova $\int e^{2y} dy = \int \log x dx$, da cui si ricava $\frac{1}{2} e^{2y} = x \log x - x + c$. Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 3$, otteniamo $c = 1 + \frac{1}{2} e^6$, e quindi la soluzione è:

$$y(x) = \frac{1}{2} \log \left[2x \log x - 2x + 2 + e^6 \right].$$

Equazioni che si abbassano di grado. Un'equazione di grado superiore al primo in cui non compare esplicitamente la y si puó abbassare di grado prendendo come variabile $u = y'$. Spieghiamo l'idea con un semplice esempio. Consideriamo l'equazione

$$y'' + \frac{y'}{1+x} = 0.$$

In essa non compare la y, per cui possiamo porre $u = y'$ ottenendo l'equazione in u

$$u' + \frac{u}{1+x} = 0.$$

Questa è lineare, omogenea del primo ordine, con $A(x) = \log|x+1|$ e $e^{-A(x)} = \frac{1}{|x+1|}$; quindi il suo integrale generale è $u(x) = \frac{C_1}{x+1}$ (Teorema 1; notiamo che $\frac{C_1}{|x+1|}$ può essere sostituita con $\frac{C_1}{x+1}$ perché per $x < -1$ il segno meno di $|x+1| = -(x+1)$ può essere inglobato nella costante C_1). Quindi si ha $y' = \frac{C_1}{x+1}$, da cui con una semplice integrazione otteniamo la soluzione generale dell'equazione di partenza:

$$y(x) = C_1 \log|x+1| + C_2.$$

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.
Dati tre numeri reali a, b, c con $a \neq 0$, l'operatore $L : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ definito ponendo

$$Ly(x) = ay''(x) + by'(x) + cy(x)$$

si chiama *operatore lineare del secondo ordine a coefficienti costanti.* Lineare vuol dire semplicemente che $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L y_1 + \beta L y_2$, per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ (a coefficienti costanti vuol dire che a, b, c non dipendono da x). Presa $f \in C(\mathbb{R})$, possiamo associare a f ed L la seguente equazione

$$Ly = f, \qquad \text{ovvero} \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \tag{16}$$

detta *lineare, del secondo ordine a coefficienti costanti.* Se $f \equiv 0$, (16) si dice *omogenea.* Diamo subito due proprietà elementari ma importanti di (16).

Proposizione 3.
1) L'insieme V delle soluzioni di $Lf = 0$ è uno spazio vettoriale, ovvero se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in V$ allora $\alpha y_1 + \beta y_2 \in V$ (*Principio di sovrapposizione*).

2) Se y_0 è una soluzione dell'equazione (non omogenea) (16) e V è lo spazio delle soluzioni di $Lf = 0$ (detta *omogenea associata*) allora

$$\{z + y_0 : z \in V\}$$

è l'insieme di tutte le soluzioni di (16).

Dimostrazione. Il punto 1) segue subito dalla linearitá: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $Ly_1 = Ly_2 = 0$ allora $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L y_1 + \beta L y_2 = 0$. Dimostriamo ora il punto 2). Se fissiamo y_0 tale che $Ly_0 = f$, allora per $y \in C^2(\mathbb{R})$ si ha

$$Ly = f \Leftrightarrow Ly = Ly_0 \Leftrightarrow L(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow y - y_0 = z \quad \text{con} \quad z \in V.$$

$\square$

Il punto 2) della Proposizione prcedente si può anche riformulare dicendo che per determinare l'integrale generale dell'equazione non omogenea basta trovare una *soluzione particolare* (sarebbe y_0) e sommare ad essa l'integrale generale dell'omogenea associata. Per quanto riguarda il punto 1), diremo che due soluzioni y_1, y_2 di una equazione omogenea sono *linearmente indipendenti* se si ha $\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, solo se $\alpha = \beta = 0$.

Soluzione delle equazioni lineari, omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine. Con riferimento al paragrafo precedente, consideriamo il caso omogeneo. Cerchiamo la soluzione dell' equazione

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{17}$$

nella forma $y(x) = e^{\lambda x}$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare. Si ha $y' = \lambda e^{\lambda x} = \lambda y$ e $y'' = \lambda^2 y$ e quindi $Ly = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x}$. Ne segue che $Ly = 0$ se e soltanto se

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{18}$$

cioè $y(x) = e^{\lambda x}$ risolve (17) se e soltanto se λ risolve l'equazione algebrica (18), detta *equazione caratteristica* di (17). Per il momento, facciamo l'ipotesi seguente: l'equazione (18) ha due radici reali e distinte λ_1, λ_2 (e quindi $\Delta = b^2 - 4ac > 0$). Il metodo sopra riportato fornisce quindi due soluzioni di (17): $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. Queste sono linearmente indipendenti: se fosse $\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dividendo per $e^{\lambda_2 x}$ troveremmo $\alpha e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = -\beta$, assurdo se non si ha $\alpha = \beta = 0$, perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e quindi $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$ non è costante. Ora vogliamo determinare l'integrale generale di (17). Useremo il metodo più elementare possibile, attribuito a d'Alembert. Dapprima ricordiamo che dall'identitá $a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ segue che $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ (anche $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}$, che non useremo), e quindi

$$2\lambda_1 a + b = a(2\lambda_1 + \frac{b}{a}) = a(\lambda_1 - \lambda_2). \tag{19}$$

La strategia del metodo che useremo è la seguente: cerchiamo le soluzioni di (17) nella forma $y(x) = u(x)e^{\lambda_1 x}$, dove u è una funzione da determinare. Con tale posizione, abbiamo che

$$y'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} u(x) + e^{\lambda_1 x} u'(x)$$

e poi

$$y''(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} u + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} u'(x) + e^{\lambda_1 x} u''(x)$$

e quindi

$$\begin{aligned} Ly =& (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)e^{\lambda_1 x} u + (2\lambda_1 a + b)u' e^{\lambda_1 x} + a e^{\lambda_1 x} u'' \\ =& a[(\lambda_1 - \lambda_2)u' + u'']e^{\lambda_1 x} \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato il fatto che λ_1 è una soluzione di (18) e poi l'identitá (19). Abbiamo quindi trovato che $u(x)e^{\lambda_1 x}$ è soluzione di (17) se e solo se u risolve l'equazione $u'' + (\lambda_1 - \lambda_2)u' = 0$, che ponendo $v = u'$ si abbassa di grado: $v' + (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$. La soluzione generale dell'equazione in v è: $v(x) = Ce^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$, e quindi integrando troviamo la soluzione generale di quella in u

$$u(x) = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + C_1. \tag{20}$$

Ponendo $C_2 = \frac{C}{\lambda_2-\lambda_1}$ e moltiplicando (20) per $e^{\lambda_1 x}$, troviamo la soluzione generale di (17), che riportiamo nel caso $\Delta > 0$ del seguente Teorema.

Teorema 4.

1) Se $\Delta > 0$ e λ_1, λ_2 sono le radici reali e distinte di (18), allora

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

è l'integrale generale di (17).

2) Se $\Delta = 0$ e λ_1 è l'unica soluzione di (18), allora

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

è l'integrale generale di (17).

3) Se $\Delta < 0$ e $\alpha \pm i\beta$ sono le radici complesse coniugate di (18) ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), allora

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

è l'integrale generale di (17).

ESEMPIO
Consideriamo la seguente equazione: $y'' - 2y' + 2y = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. quindi la soluzione generale dell'equazione è $y(x) = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x$.

ESERCIZIO
Dimostrare il punto 2) del precedente Teorema.

Corollario 5. Lo spazio vettoriale delle soluzioni di (17) ha dimensione due.

Se y_1, y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti di (17) allora l'integrale generale può essere espresso nella forma $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Si dice anche che y_1, y_2 formano un *sistema fondamentale* di soluzioni per (17).

Metodo della somiglianza per il caso non omogeneo. Ci occuperemo ora delle quazioni lineari del secondo ordine, a coefficienti costanti e non omogenee, in alcuni casi in cui il secondo membro è una funzione notevole. Cominciamo sempre da un caso particolare. Supponiamo di avere un'equazione lineare del secondo ordine del tipo

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = Ae^{\lambda_0 x} \tag{21}$$

con a, b, c, A, λ_0 costanti reali. Supponiamo anche $e^{\lambda_0 x}$ non sia soluzione dell'omogenea associata (17), cioè λ_0 non sia soluzione dell'equazione caratteristica (18). Dalla Proposizione 3 sappiamo che per risolvere (21) basta trovare una soluzione particolare e sommarla all'integrale generale dell'omogenea associata. Posto come sempre $Ly = ay'' + by' + cy$, preso $B \in \mathbb{R}$ si ha $LBe^{\lambda_0 x} = (a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c)Be^{\lambda_0 x}$, e inoltre la quantità tra parentesi è diversa da zero. Quindi cercare una soluzione di (21) nella forma $y(x) = Be^{\lambda_0 x}$, equivale a risolvere la semplicissima equazione algebrica

$$(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c)Be^{\lambda_0 x} = Ae^{\lambda_0 x}, \quad \text{la cui unica soluzione è} \quad B = \frac{A}{(a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c)}.$$

Questa è la semplicissima idea del metodo di somiglianza: dato che L trasforma esponenziali in esponenziali, cerchiamo la soluzione particolare sotto forma di esponenziale. L'idea funziona anche con polinomi e funzioni trigonometriche; diamo quindi le regole generali.

Teorema 6. Nei casi speciali sotto indicati, inchiamo come si può determinare una soluzione particolare y_0 dell'equazione non omogenea

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

(con $a \neq 0$).

1. Supponiamo che sia $f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$ (polinomio di grado n).
   (a) Se $c \neq 0$ possiamo cercare la soluzione particolare nella forma di un polinomio di grado n: $y_0(x) = B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0$ (i coefficienti $B_0, B_1 \ldots, B_n$ vanno determinati);
   (b) se $c = 0$ e $b \neq 0$ possiamo cercare la soluzione particolare nella forma di un polinomio di grado $n+1$ senza termine noto: $y_0(x) = B_{n+1}x^{n+1} + B_n x^n + \cdots + B_2 x^2 + B_1 x$.
   (c) se $c = b = 0$ possiamo cercare la soluzione particolare nella forma di un polinomio di grado $n+2$ senza i termini di primo grado: $y_0(x) = B_{n+2}x^{n+2} + B_{n+1}x^{n+1} + \cdots + B_2 x^2$
2. Supponiamo che sia $f(x) = Ae^{\lambda_0 x}$, con A costante.
   (a) Se λ_0 non è radice di (18), possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_0(x) = Be^{\lambda_0 x}$;
   (b) se λ_0 è radice di molteplicià m (dove $m = 1$ o $m = 2$) di (18), possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_0 = Bx^m e^{\lambda_0 x}$.
3. Supponiamo che sia $f(x) = Ae^{\lambda_0 x}\cos(\omega_0 x) + Be^{\lambda_0 x}\sin(\omega_0 x)$, con A, B costanti.
   (a) Se $\lambda_0 \pm i\omega_0$ non sono radici di (18), possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_0(x) = Ce^{\lambda_0 x}\cos(\omega_0 x) + De^{\lambda_0 x}\sin(\omega_0 x)$, con C, D costanti da determinare;
   (b) se $\lambda_0 \pm i\omega_0$ sono radici (complesse coniugate) di (18), possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_0(x) = Cxe^{\lambda_0 x}\cos(\omega_0 x) + Dxe^{\lambda_0 x}\sin(\omega_0 x)$.

ESEMPI

1) Consideriamo la seguente equazione: $y'' + y' = 5\sin 2x$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0, -1$. Dunque l'integrale generale dell'omogenea associata è $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$. I numeri $0 \pm 2i$ non sono radici dell'equazione caratteristica, e quindi possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_0(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ (punto (a) del caso 3.). Derivando troviamo $y_0'(x) = 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)$ e poi $y_0''(x) = -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x)$. Sostituendo nell'equazione troviamo

$$(-4a - 2b)\sin(2x) + (-4b + 2a)\cos(2x) = 5\sin(2x)$$

che si traduce nel sistema

$$\begin{cases} -4a - 2b = 5 \\ 2a - 4b = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a = -1, b = -\frac{1}{2}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione proposta è:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} - \sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

2) Consideriamo ora l'equazione $y'' - 2y' = x^2 + x$. Le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda = 0, 2$. Essendo $c = 0, b = -2$, siamo nel caso (b) del punto 1. Possiamo quindi cercare la soluzione particolare nella forma $y_0(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Derivando y_0 due volte e sostituendo le derivate nell'equazione, troviamo

$$-6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2C = x^2 + x.$$

Questa si traduce nel sistema

$$\begin{cases} -6A & = 1 \\ 6A - 4B & = 1 \\ B - C & = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = -\frac{1}{6}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x.$$

3) Consideriamo l'equazione $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$. Le radici dell'equazione caratteristica sono $1 \pm i$, e quindi siamo nel caso (b) del punto 3. Possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_0(x) = axe^x \sin x + bxe^x \cos x$. Per semplificare i calcoli, poniamo $u(x) = ae^x \sin x + be^x \cos x$. Ora abbiamo $y_0(x) = xu(x)$ e la funzione incognita $u(x)$ coincide con l'integrale generale dell'omogenea associata, cioè si ha:

$$u'' - 2u' + 2u = 0 \tag{22}$$

per ogni valore dei coefficienti a e b (che sono poi le incognite). Con le posizioni fatte, abbiamo $y_0' = xu' + u$ e $y_0'' = xu'' + 2u'$ e quindi, tenendo conto di (22)

$$y_0'' - 2y_0' + 2y_0 = x(u'' - 2u' + 2u) + 2u' - 2u \equiv 2u' - 2u.$$

Quindi u deve verificare l'equazione $2u' - 2u = e^x \sin x$, che svolti i calcoli è risolta solo prendendo $a = 0$ e $b = -\frac{1}{2}$. In conclusione, $u(x) = -\frac{1}{2}e^x \cos x$ e quindi la soluzione generale dell'equazione proposta è:

$$y(x) = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x - \frac{1}{2} x e^x \cos x.$$

4) Consideriamo l'equazione $y'' = x^2 + x + 1$. Siamo nel caso c) del punto 1. Ora basta integrare due volte membro a mambro: la soluzione generale è $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$.

Concludiamo il seguente paragrafo con una semplice osservazione, che poi è un'altra manifestazione del principio di sovrapposizione. Supponiamo di avere un'equazione del tipo $Ly = f + g$, dove f e g sono due distinte funzioni del tipo considerato nel Teorema 5. Allora possiamo determinare due funzioni $y_0, \widetilde{y}_0$ tali che: $Ly_0 = f$ e $L\widetilde{y}_0 = g$. Si ha quindi $L(y_0 + \widetilde{y}_0) = f + g$, cioè $y_0 + \widetilde{y}_0$ è una soluzione particolare dell'equazione proposta. Come esempio prendiamo l'equazione $y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{2x}$. Ora $y_0(x) = -\frac{1}{4}e^x$ è una soluzione particolare di $y'' - 2y' - 3y = e^x$, mentre $\widetilde{y}_0(x) = -\frac{1}{3}e^{2x}$ risolve $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$. Essendo $-1, 3$ le soluzioni dell'equazione caratteristica, l'integrale generale dell'equazione proposta è:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange. Terminiamo queste note dando un metodo generale per la determinazione di una soluzione particolare per le equazioni lineari del secondo ordine, a coefficienti costanti e non omogenee. Supponiamo che il secondo membro $f(x)$ di (16) sia una arbitraria funzione continua e che y_1, y_2 sia un sistema fondamentale per l'omogenea associata (17). Cerchiamo la soluzione particolare nella forma

$$y_0(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x). \tag{23}$$

Derivando (23) si trova: $y_0' = v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2'$. A questo punto imponiamo la condizione

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0, \tag{24}$$

e quindi l'espressione per y_0' si semplifica: $y_0' = v_1y_1' + v_2y_2'$. Derivando l'ultima espressione scritta, troviamo $y_0'' = v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2''$. Quindi si ha

$$Ly_0 = v_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + v_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(v_1'y_1' + v_2'y_2') \equiv a(v_1'y_1' + v_2'y_2'),$$

poiché y_1 e y_2 sono soluzioni di (17). Dunque y_0 è una soluzione di (16) se e solo se $a(v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x)) = f(x)$ e questa equazione va messa a sistema con (24):

$$\begin{cases} v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' = \frac{f(x)}{a}. \end{cases} \tag{25}$$

Risolto (25), si determinano v_1', v_2' e poi con una semplice integrazione anche v_1, v_2.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente equazione

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Come sistema fondamentale prendiamo quello dato dal Teorema 4: $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$ (l'equazione caratteristica ha la radice doppia 1). Cerchiamo quindi la soluzione particolare nella forma $y_0(x) = v_1(x)e^x + v_2(x)xe^x$. Il sistema (25) si traduce in

$$\begin{cases} v_1'e^x + v_2'xe^x = 0 \\ v_1'e^x + v_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{1+x^2}, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} v_1' + v_2'x = 0 \\ v_1' + v_2'(1+x) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda ricaviamo $v_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, e quindi dalla prima equazione troviamo che $v_1'(x) = -\frac{x}{1+x^2}$. Quindi possiamo prendere $v_1(x) = -\log\sqrt{1+x^2}$ e $v_2(x) = \mathrm{arctg}x$. In conclusione, l'integrale generale dell'equazione proposta è:

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x - e^x\log\sqrt{1+x^2} + xe^x\mathrm{arctg}x.$$