6. Risolvere le seguenti disequazioni:

(i) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}} \geq 2;$ (ii) $\sqrt{\dfrac{|x+2|}{|x-1|}} > 1;$

(iii) $\sqrt{4x^2-1} < x-3;$ (iv) $\sqrt{3x^2-1} > \sqrt{x^2-3};$

(v) $|x|\sqrt{1-2x^2} > 2x^2-1;$ (vi) $\dfrac{|x|-3}{\sqrt{x-2}} > \sqrt{x}.$

7. Provare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\max\{a,0\} = \frac{a+|a|}{2}\ , \quad \min\{a,0\} = -\max\{-a,0\} = \frac{a-|a|}{2}\ .$$

8. Si dimostri la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz utilizzando il principio di induzione.

1.10 La funzione esponenziale

Vogliamo definire la funzione esponenziale a^x per ogni base $a > 0$ e per ogni esponente $x \in \mathbb{R}$, naturalmente preservando le proprietà usuali, "notoriamente" vere quando gli esponenti sono numeri naturali. A questo scopo procederemo in vari passi.
Prima di cominciare, enunciamo un lemma che useremo a più riprese.

Lemma 1.10.1 (dell'arbitrarietà di ε) *Siano a, b numeri reali e M, δ numeri reali positivi. Supponiamo che risulti*

$$a \leq b + M\varepsilon \qquad \forall \varepsilon \in]0,\delta[;$$

allora si ha necessariamente $a \leq b$.

Dimostrazione Se fosse $a > b$, scegliendo

$$\varepsilon \in \left]0, \min\left\{\delta, \frac{a-b}{M}\right\}\right[$$

si otterrebbe $a > b + M\varepsilon$, contro l'ipotesi. $\square$

1º passo (esponenti naturali) Ricordiamo che per $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ la potenza a^n è stata definita all'inizio del paragrafo 1.7; è facile verificare che se $a, b > 0$ valgono i seguenti fatti:

$$\begin{array}{rl}
\textbf{(i)} & a^n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad a^0 = 1; \\
\textbf{(ii)} & a^{n+m} = a^n \cdot a^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}; \\
\textbf{(iii)} & a^{nm} = (a^n)^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}; \\
\textbf{(iv)} & (ab)^n = a^n \cdot b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\
\textbf{(v)} & a < b \quad \Longrightarrow \quad a^n < b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+; \\
\textbf{(vi)} & \begin{cases} a < 1 \implies a^n < 1 \\ a > 1 \implies a^n > 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+; \\
\textbf{(vii)} & \begin{cases} a < 1 \implies a^m < a^n \\ a > 1 \implies a^m > a^n \end{cases} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ con } m > n.
\end{array}$$

Le proprietà (i)-(vi) si verificano per induzione su n (esercizio 1.10.1), mentre la (vii) segue banalmente da (vi) scrivendo $a^m = a^n \cdot a^{m-n}$.

2^{o} passo (radici n-sime) Per $n \in \mathbb{N}^+$ e $a > 0$ la quantità $a^{1/n}$ è stata definita nel paragrafo 1.8 come l'unica soluzione positiva dell'equazione $x^n = a$; dunque per definizione si ha

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Risulta anche

$$a^{\frac{1}{nm}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^+$$

(perché, per (iii), i due membri risolvono entrambi l'equazione $x^{mn} = a$),

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^+$$

(perché, per (iii), i due membri risolvono entrambi l'equazione $x^n = a^m$),

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

(perché, per (iv), i due membri risolvono entrambi l'equazione $x^n = ab$),

$$\begin{cases} a < 1 \implies a^{\frac{1}{n}} < 1 \\ a > 1 \implies a^{\frac{1}{n}} > 1 \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

(per l'esercizio 1.10.2),

$$\begin{cases} a < 1 \implies a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}} \\ a > 1 \implies a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{m}} \end{cases} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^+ \text{ con } m > n$$

(elevando entrambi i membri alla potenza mn ed usando (iii), (vii)).

3^o passo (esponenti razionali) Se $r \in \mathbb{Q}$, sarà $r = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^+$; se $a > 0$ poniamo allora, per definizione,

$$a^{\frac{p}{q}} = \begin{cases} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p & \text{se } p \geq 0 \\ \dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{-p}} & \text{se } p < 0. \end{cases}$$

Occorre però verificare che questa è una *buona definizione*, nel senso che essa non deve dipendere dal modo di rappresentare in frazione il numero razionale r: in altri termini, bisogna controllare che se $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, cioè $m = kp$, $n = kq$ con $k \in \mathbb{N}^+$, allora risulta $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$. Ed infatti, supposto ad esempio $p \geq 0$, utilizzando le proprietà precedenti si trova

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{kq}})^{kp} = [((a^{\frac{1}{q}})^{\frac{1}{k}})^k]^p = (a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}};$$

il discorso è del tutto analogo se $p < 0$.
Si ottengono allora facilmente le estensioni delle proprietà (i)-(vii) al caso di esponenti razionali (vedere esercizio 1.10.3):

(i) $a^r > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \qquad a^0 = 1;$

(ii) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s \quad \forall r, s \in \mathbb{Q};$

(iii) $a^{rs} = (a^r)^s \quad \forall r, s \in \mathbb{Q};$

(iv) $(ab)^r = a^r \cdot b^r \quad \forall r \in \mathbb{Q};$

(v) $a < b \implies a^r < b^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$ con $r > 0;$

(vi) $\begin{cases} a < 1 \implies a^r < 1 \\ a > 1 \implies a^r > 1 \end{cases} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$ con $r > 0;$

(vii) $\begin{cases} a < 1 \implies a^r < a^s \\ a > 1 \implies a^r > a^s \end{cases} \quad \forall r, s \in \mathbb{Q}$ con $r > s.$

4$^{\mathbf{o}}$ passo (esponenti reali) Manco a dirlo, nell'estensione da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ è essenziale l'assioma di continuità. Prima di definire la quantità a^x per $x \in \mathbb{R}$, dimostriamo il seguente risultato che ci illuminerà sul modo di procedere.

Proposizione 1.10.2 *Siano $a, x \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, e poniamo*

$$A = \{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}, \qquad B = \{a^s : s \in \mathbb{Q},\ s > x\}.$$

Allora gli insiemi A e B sono separati; in particolare, se $a \geq 1$ si ha $\sup A = \inf B$*, mentre se $a \leq 1$ risulta* $\inf A = \sup B$.

Dimostrazione Supponiamo $a \geq 1$ e poniamo $\lambda = \sup A$, $\mu = \inf B$; questi numeri λ, μ sono finiti (esercizio 1.10.4). Da (vii) segue che

$$a^r < a^s \qquad \forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x < s,$$

quindi risulta $\lambda \leq \mu$. Dobbiamo provare che $\lambda = \mu$. Se fosse invece $\lambda < \mu$, dal fatto che

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

(esempio 1.8.3 (1)) segue che possiamo scegliere $n \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < \frac{\mu}{\lambda}.$$

Scelto poi $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x - \frac{1}{n} < r < x$, il che è lecito per la densità dei razionali in $\mathbb{R}$ (corollario 1.6.8), si ha $r + \frac{1}{n} > x$; dunque, usando (ii),

$$\mu \leq a^{r+\frac{1}{n}} = a^r \cdot a^{\frac{1}{n}} \leq \lambda \cdot a^{\frac{1}{n}} < \lambda \cdot \frac{\mu}{\lambda} = \mu.$$

Ciò è assurdo e pertanto $\lambda = \mu$.
Supponiamo adesso $0 < a \leq 1$ e poniamo $L = \inf A$, $M = \sup B$; nuovamente, questi numeri L, M sono finiti (esercizio 1.10.4). Da (vii) segue stavolta

$$a^r > a^s \qquad \forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x < s,$$

cosicché $L \geq M$. Se fosse $L > M$, preso $n \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\frac{M}{L} < a^{\frac{1}{n}} < 1$$

(lecito, essendo $\sup_{n\in\mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1$) e scelto $s \in \mathbb{Q}$ con $x < s < x + \frac{1}{n}$, si ha $s - \frac{1}{n} < x$ e dunque, per (ii),

$$L \leq a^{s-\frac{1}{n}} = \frac{a^s}{a^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{M}{a^{\frac{1}{n}}} < M \cdot \frac{L}{M} = L.$$

Ciò è assurdo e pertanto $L = M$. □

La precedente proposizione ci dice che la nostra scelta per definire a^x è obbligata: se vogliamo mantenere la proprietà (vii) siamo forzati a dare questa

Definizione 1.10.3 *Siano $a, x \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. Indichiamo con a^x il numero reale seguente:*

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\} = \inf\{a^s : s \in \mathbb{Q}, s > x\} & \text{se} \quad a \geq 1 \\ \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\} = \sup\{a^s : s \in \mathbb{Q}, s > x\} & \text{se} \quad 0 < a \leq 1. \end{cases}$$

Non è difficile verificare che nel caso in cui x è razionale questa definizione concorda con la precedente (esercizio 1.10.4).

Osservazioni 1.10.4 (1) Dalla definizione segue subito che $1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(2) Per ogni $a > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. Infatti, supposto ad esempio $a \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} a^{-x} &= \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < -x\} &&= \text{(posto } s = -r\text{)} \\ &= \sup\{a^{-s} : s \in \mathbb{Q},\ s > x\} &&= \text{(per definizione nel caso di esponente razionale)} \\ &= \sup\left\{\tfrac{1}{a^s} : s \in \mathbb{Q},\ s > x\right\} &&= \text{(per l'esercizio 1.10.5)} \\ &= \frac{1}{\inf\{a^s : s \in \mathbb{Q},\ s > x\}} &&= \frac{1}{a^x}\,; \end{aligned}$$

il discorso è analogo se $0 < a \leq 1$.

Estendiamo adesso le proprietà (i)-(vii) al caso di esponenti reali. La (i) è evidente. Per la (ii) si ha:

Proposizione 1.10.5 *Per ogni $a > 0$ si ha*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione Supponiamo ad esempio $a \geq 1$. Poiché

$$a^{x+y} = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q < x + y\},$$

per ogni $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r < x$ e $s < y$ si ha $r + s < x + y$ e quindi

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \leq a^{x+y}.$$

Passando all'estremo superiore separatamente rispetto a r e rispetto a s, otteniamo (esercizio 1.5.15)

$$a^x a^y \leq a^{x+y}.$$

In modo del tutto analogo, usando il fatto che

$$a^{x+y} = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q > x + y\},$$

si prova che $a^x a^y \geq a^{x+y}$. La tesi è così provata quando $a \geq 1$.
Nel caso $0 < a \leq 1$ si procede esattamente come sopra: l'unica differenza è che dalla relazione

$$a^{x+y} = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q < x + y\}$$

segue che $a^x a^y \geq a^{x+y}$, mentre dalla relazione

$$a^{x+y} = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q < x + y\}$$

segue che $a^x a^y \leq a^{x+y}$. $\square$

Proviamo ora (iv) e (iii); per le proprietà (v), (vi), (vii) si rimanda agli esercizi 1.10.6, 1.10.7 e 1.10.8.

Proposizione 1.10.6 *Per ogni $a, b > 0$ si ha*

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione Supponiamo $a, b \geq 1$. Usando la caratterizzazione di a^x, b^x, $(ab)^x$ mediante gli estremi superiori, si vede che per ogni $r \in \mathbb{Q}$ con $r < x$ si ha

$$a^r b^r = (ab)^r \leq (ab)^x.$$

D'altra parte fissato $\varepsilon > 0$ esistono $r, r' \in \mathbb{Q}$ con $r < x$ e $r' < x$ tali che

$$a^x - \varepsilon < a^r \leq a^x, \qquad b^x - \varepsilon < b^{r'} \leq b^x;$$

quindi posto $\rho = \max\{r, r'\}$ si ha a maggior ragione

$$a^x - \varepsilon < a^\rho \le a^x, \qquad b^x - \varepsilon < b^\rho \le b^x.$$

Ne segue, scegliendo $0 < \varepsilon < \min\{a^x, b^x\}$,

$$(a^x - \varepsilon)(b^x - \varepsilon) < a^\rho b^\rho = (ab)^\rho \le (ab)^x$$

da cui, essendo $\varepsilon^2 > 0$,

$$a^x b^x - \varepsilon(b^x + a^x) < (ab)^x$$

ossia

$$a^x b^x < (ab)^x + \varepsilon(a^x + b^x) \qquad \forall \varepsilon \in]0, \min\{a^x, b^x\}[;$$

per il lemma dell'arbitrarietà di ε si deduce che $a^x b^x \le (ab)^x$.
Utilizzando invece le caratterizzazioni di $a^x, b^x, (ab)^x$ mediante gli estremi inferiori, si ottiene in modo analogo che $a^x b^x \ge (ab)^x$. La tesi è così provata quando $a, b \ge 1$.
Se $a, b \le 1$ si procede in modo simmetrico: usando le caratterizzazioni con gli estremi superiori si trova che $a^x b^x \le (ab)^x$, usando quelle con gli estremi inferiori si trova l'altra disuguaglianza.
Infine se $a > 1 > b$ e, ad esempio, $ab \ge 1$, allora usando le caratterizzazioni con gli estremi superiori avremo:

$$a^r b^r = (ab)^r \le (ab)^x \qquad \forall r \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x,$$

e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $r', s' \in \mathbb{Q}$, con $r' < x$, $s' > x$, tali che

$$a^x - \varepsilon < a^{r'} \le a^x, \qquad b^x - \varepsilon < b^{s'} \le b^x;$$

dunque se $0 < \varepsilon < \min\{a^x, b^x\}$ si ricava, ricordando che $b^{s'-r'} \le 1$,

$$0 < (a^x - \varepsilon)(b^x - \varepsilon) < a^{r'} b^{s'} \le a^{r'} b^{r'} = (ab)^{r'} \le (ab)^x,$$

da cui, procedendo come prima, $a^x b^x \le (ab)^x$. Similmente, usando le caratterizzazioni con gli estremi inferiori, si arriva alla disuguaglianza opposta. Se $a > 1 > b$ e $ab \le 1$, la procedura è la stessa, "mutatis mutandis", e lasciamo i dettagli al lettore. □

Osservazione 1.10.7 Dalla proposizione precedente segue, in particolare, che

$$a^x \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x = 1^x = 1 \qquad \forall a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

cioè, ricordando l'osservazione 1.10.4,

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \qquad \forall a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposizione 1.10.8 *Per ogni $a > 0$ si ha*

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione È sufficiente considerare il caso $x, y \geq 0$: infatti, provata la tesi in questo caso, se $\min\{x, y\} < 0$ ci si riconduce ad esso nel modo seguente:

$$(a^x)^y = \left(\frac{1}{a^{-x}}\right)^y = \frac{1}{a^{(-x)y}} = a^{xy} \qquad \text{se } x < 0 \leq y;$$

$$(a^x)^y = \frac{1}{(a^x)^{-y}} = \frac{1}{a^{-xy}} = a^{xy} \qquad \text{se } y < 0 \leq x;$$

$$(a^x)^y = \frac{1}{(a^x)^{-y}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-x}}\right)^{-y}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{(-x)(-y)}}} = a^{(-x)(-y)} = a^{xy} \qquad \text{se } x, y < 0.$$

Siano dunque $x, y \geq 0$: se $x = 0$ oppure $y = 0$ la tesi è evidente, dunque possiamo assumere $x, y > 0$. Consideriamo dapprima il caso $a \geq 1$: in particolare avremo anche $a^x \geq 1$. Usando la caratterizzazione con gli estremi superiori, si ha che

$$(a^r)^s = a^{rs} \leq a^{xy} \qquad \forall r, s \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x \text{ e } s < y,$$

e per ogni $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ esistono $r', s' \in \mathbb{Q}$ tali che $0 < r' < x$, $0 < s' < y$ e

$$a^x(1 - \varepsilon) < a^{r'} \leq a^x, \qquad (a^x)^y(1 - \varepsilon) < (a^x)^{s'} \leq (a^x)^y.$$

Dunque, facendo uso della proposizione 1.10.8 e tenendo conto che $s' \geq 0$ e $0 < r's' < xy$, si ottiene

$$(a^x)^y < \frac{(a^x)^{s'}}{1 - \varepsilon} = \frac{(a^x)^{s'}(1 - \varepsilon)^{s'}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}} = \frac{[a^x(1 - \varepsilon)]^{s'}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}} \leq \frac{a^{r's'}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}} \leq \frac{a^{xy}}{(1 - \varepsilon)^{s'+1}}\,.$$

Da qui, scegliendo $n \in \mathbb{N}$ tale che $s' + 1 \leq n$, e osservando che da $\varepsilon < \frac{1}{2}$ segue $\frac{1}{1-\varepsilon} < 1 + 2\varepsilon$, concludiamo che

$$(a^x)^y < \frac{a^{xy}}{(1-\varepsilon)^{s'+1}} < a^{xy}(1+2\varepsilon)^n.$$

D'altra parte, dalla formula del binomio (teorema 1.7.1) e dall'osservazione 1.7.2 (3) segue che

$$(1+2\varepsilon)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2\varepsilon)^k < 1 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} < 1 + 2^{n+1}\varepsilon,$$

da cui finalmente

$$(a^x)^y < a^{xy} + a^{xy} \cdot 2^{n+1}\varepsilon \qquad \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[,$$

e dunque $(a^x)^y \leq a^{xy}$ in virtù dell'arbitrarietà di ε.
In modo analogo, usando la caratterizzazione con gli estremi inferiori, si prova la disuguaglianza opposta: ciò conclude la dimostrazione nel caso $a \geq 1$.
Se $0 < a \leq 1$ si procede in modo analogo: la caratterizzazione con gli estremi superiori implicherà che $(a^x)^y \geq a^{xy}$, mentre quella con gli estremi inferiori porterà alla disuguaglianza opposta. La tesi è così provata. $\square$

Logaritmi

Abbiamo visto che la funzione esponenziale di base a (con a numero positivo e diverso da 1) è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è a valori in $]0, \infty[$. Essa è *strettamente monotòna*, ossia verifica (esercizio 1.10.8)

$$x < y \implies a^x < a^y \quad \text{se } a > 1, \qquad x < y \implies a^x > a^y \quad \text{se } a < 1:$$

se $a > 1$ è dunque una funzione *strettamente crescente* su $\mathbb{R}$, se $a < 1$ è *strettamente decrescente* su $\mathbb{R}$. In particolare, essa è *iniettiva*: ciò significa che ad esponenti distinti corrispondono potenze distinte, ossia

$$a^x = a^y \implies x = y.$$

Inoltre la funzione esponenziale ha per codominio la semiretta $]0, \infty[$, vale a dire che ogni numero positivo è uguale ad una potenza di base a, per un opportuno esponente $x \in \mathbb{R}$; ciò è garantito dal seguente risultato: