Numerabilità dei razionali, non numerabilità dei reali e cardinalità del continuo

Claudia Pinzari

1 Numerabilità

Definizione Abbiamo definito un insieme E *finito* se può essere posto in corrispondenza biunivoca con qualche $\{1, \dots, n\}$, e *infinito* altrimenti. Chiaramente ciascun $\{1, \dots, n\}$ è finito.

Vi ho enunciato, senza dimostrazione, il seguente teorema, che potete trovare, con diversa formulazione e definizioni iniziali, nella sottosezione 1.9 del libro di Berberian.

1.1. Teorema *Le seguenti proprietà sono equivalenti,*

a) *E è infinito,*

a) *esiste una funzione $f : E \to E$ iniettiva non suriettiva,*

c) *esiste una funzione $g : \mathbb{N} \to E$ iniettiva.*

Per esempio $\mathbb{N}$ è infinito poiché la funzione $n \to 2n$ verifica b).

Abiamo visto che questo teorema facilmente implica che se E è finito e in corrispondenza biunivoca sia con $\{1, \dots, n\}$ che con $\{1, \dots, m\}$ allora $n = m$, ovvero n è unico.

Infatti in questo caso avremmo una corrispondenza biunivoca tra $\{1, \dots, n\}$ e $\{1, \dots, m\}$, che, composta con la naturale inclusione iniettiva di $\{1, \dots, m\}$ in $\{1, \dots, n\}$ se $m \leq n$ darebbe una funzione iniettiva di $\{1, \dots, n\}$ in se, che deve essere suriettiva perché questo insieme è finito, quindi $n = m$.

Definizione Se E è finito e in corrispondenza biunivoca con $\{1, \dots, n\}$, n si chiama la *cardinalità* di E.

Nell'analisi ha molto interesse l'infinito. L'ordine di infinito minimo è quello della numerabilità infinita.

Definizione Abbiamo definito un insieme E *numerabile* se è vuoto, oppure se è finito (può essere posto in corispondenza biunivoca con $\{1, \dots, n\}$) oppure con $\mathbb{N}$, in quest'ultimo caso diremo che E è *numerabile infinito.*

In altri termini, dire che E è numerabile infinito vuol dire che i suoi elementi si possono scrivere in una lista infinita (successione) senza ripetizioni:

$$E = \{e_1, e_2, \dots, \}, \quad e_n \neq e_m, \quad \text{se} \quad n \neq m.$$

Per esempio, così si vede che $\mathbb{Z}$ è numerabile infinito, e si vede anche che $E \times F$ è numerabile infinito se E ed F lo sono. Infatti possiamo numerare $E \times F$ così, se abbiamo anche $F = \{f_1, f_2, \dots, \}$, (*Conviene fare il disegno*)

$$E \times F = \{(e_1, f_1), (e_2, f_1), (e_1, f_2), (e_1, f_3), (e_2, f_2), (e_3, f_1), \dots\}$$

Abbiamo poi dimostrato i seguenti teoremi, le cui dimostrazioni qui non ripeto perché si trovano nel libro di Berberian.

1.2. Teorema (B. Lemma 1.10.3) *Ogni sottinsieme infinito di $\mathbb{N}$ è numerabile infinito.*

1.3. Teorema (B. Theorem 1.10.4) *E è numerabile se e solo se esiste una funzione suriettiva*

$$f : \mathbb{N} \to E$$

oppure è vuoto.

1.4. Corollario *$\mathbb{Q}$ è numerabile (infinito).*

Dim. la funzione $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to p/q \in \mathbb{Q}$ è suriettiva e $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

Volendo sintetizzare sulla numerabilità: tra gli interi e i naturali è facile costruire una corrispondenza biunivoca. Ma abbiamo dimostrato che esiste una corrispondenza biunivoca anche tra i naturali e i razionali. Questo fatto è più sorprendente perché sappiamo che i razionali sono densi nei reali.

2 Non numerabilità di $\mathbb{R}$, cardinalità del continuo

Abbiamo poi visto il seguente teorema, dimostrato da Cantor nel 1874. Con esso di fatto Cantor dimostrò la non numerabilità dei numeri irrazionali. Ne fornì successivamente una seconda dimostrazione. Si può vedere l'interessante articolo su Wikipaedia: 'Cantor's first uncountability proof'. Non posso fare a meno di ripetere la dimostrazione.

2.1. Teorema *L'intervallo $[0, 1]$ è non numerabile, quindi $\mathbb{R}$ è non numerabile.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che l'insieme degli elementi di $[0, 1]$ non si può scrivere in successione $x_1, x_2, \dots$. In altri termini, dobbiamo mostrare che per ogni successione $x_n \in [0, 1]$ esiste un reale $x \in [0, 1]$ tale che $x \neq x_n$ per ogni n. A questo fine, dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in *tre* sottointervalli della stessa ampiezza, $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ e $[2/3, 1]$ e ne scegliamo uno, chiamato I_1, tale che $x_1 \notin I_1$. Ora applichiamo la stessa procedura con I_1 al posto di $[0, 1]$ e x_2 al posto di x_1. Così facendo troviamo una successione di intervalli incapsulati,

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

tale che $x_n \notin I_n$ per ogni n. Ciascun I_n ha ampiezza $1/3^n$, quindi per il teorema degli intervalli incapsulati esiste un unico $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Poiché invece $x_n \notin I_n$ per ogni n, vediamo che nessun x_n può essere x.

Anticipiamo il seguente teorema, che non abbiamo dimostrato, ma useremo in seguito.

2.2. Teorema (Schroder-Bernstein) *Siano E e F due insiemi. Se esistono funzioni iniettive $f : E \to F$ e $g : F \to E$ allora esiste anche una funzione biunivoca $h : E \to F$.*

Ho anticipato il seguente teorema, su cui probabilmente ritorneremo, e la cui dimostrazione non è difficile se si usa il teorema precedente.

2.3. Teorema $[0,1]$ *può essere posto in corrispondenza biunivoca con* $\mathbb{R}$.

Ci siamo poi chiesti se possiamo trovare altri esempi di insiemi non numerabili che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con [0,1].

Abbiamo quindi introdotto l'insieme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ delle successioni $n \to x(n)$ a due valori, nell'insieme $\{0,1\}$. (Attenzione alla notazione).

2.4. Teorema $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *è non numerabile.*

Dim. Dobbiamo mostrare che per ogni successione x_n di successioni, ovvero$x_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ per ogni n, si può trovare $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tale che $x_n \neq x$ per ogni n. Basta definire

$$x(n) := 1 - x_n(n).$$

$x(n)$ è la 'complementare' della successione diagonale infinita quando scriviamo i temini di ciascuna x_1, x_2, come righe infinite. Osserviamo che x differisce da tutte le x_n perche' per ogni n, $x(n) \neq x_n(n)$. Questo si chama l'*argomento diagonale di Cantor* ed è abbastanza ubiquito.

Lo scopo delle pagine successive è dimostrare il seguente teorema.

2.5. Teorema $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *può essere posto in corrispondenza biunivoca con* $[0,1]$.

La prima domanda è come collegare i numeri reali con le successioni a due valori. Una risposta la conosciamo, usiamo l'espansione binaria di un numero reale. Vedremo che ci sono dei problemi perché l'espansione binaria non è unica, e per risolverli faremo così.

Non costruiremo esplicitamente una corrispondenza biunivoca tra $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $[0,1]$. Costruiremo invece due funzioni iniettive

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$$

$$g : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

e useremo il teorema di Schroder-Bernstein.

Ora scrivo quello che abbiamo visto a lezione sulle espansioni binarie, poiché il libro di Berberian è avanzato, questi argomenti non li spiega, ma li sottintende, e sono necessari a mio avviso per motivare, chiarire e capire meglio quello che sta succedendo.

Abbiamo visto che l'esistenza della espansione in base 2 di un reale $x \in [0,1]$ può essere spiegata con il metodo delle bisezioni dell'intervallo $[0,1]$. Infatti, dividendo $[0,1]$ via via in sottointervalli di ampiezza $1/2$, $1/4$, $1/8\dots$ e scegliendo per ogni n uno dei sottointervalli $[a_n, b_n]$ che contiene x, che ha ampiezza $\frac{1}{2^n}$, si ha una successione di intervalli incapsulati

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots.$$

La successione degli estremi sinistri converge a x,

$$x = \lim_n a_n,$$

perché $x \in [a_n, b_n]$ per ogni n, e quindi

$$|x - a_n| \le b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \to 0.$$

(Chiaramente anche la successione degli estremi destri converge a x e quello che diciamo può equivalentemente essere fatto partendo da b_n, ma questo non è importante).

D'altra parte a_{n+1} si può descrivere a partire da a_n. Infatti, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ è una delle due metà di $[a_n, b_n]$, quindi a_{n+1} o coincide con a_n oppure vale $a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. Quindi si ha

$$a_{n+1} = a_n + \frac{s_{n+1}}{2^{n+1}}, \qquad s_{n+1} \in \{0,1\},$$

e questo fornisce

$$x = \lim_n a_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{2^k} = \sum_{1}^{\infty} \frac{s_k}{2^k}.$$

L'espansione binaria di x può essere definita come la successione trovata $s_1, s_2, \dots$ a valori in $\{0,1\}$. Però non è unica, perché può succedere che ad un certo passo, diciamo n, del procedimento di bisezione, x sia un estremo di un sottointervallo. (Tra parentesi, questa eventualità è piuttosto frequente, in un certo senso, perché capita esattamente quando x è, quello che si dice, un *razionale diadico*, ovvero un numero della forma $x = \frac{k}{2^n}$, con k intero. Due razionali diadici successivi con lo stesso denominatore, $\frac{k}{2^n}$ e $\frac{k+1}{2^n}$, distano $\frac{1}{2^n}$ e questo fatto ci dice che sono densi nella retta. Quindi quelli contenuti nell'intervallo $[0,1]$ sono densi in quell'intervallo...) Se questo succede, x appartiene a due sottointervalli, e dunque in quel momento nella scelta dell'intervallo del passo $n+1$ che contiene x ho due possibilità distinte, il sottointervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ della metà sinistra di $[a_n, b_n]$ oppure quello della metà destra.

Per esempio per $x = \frac{1}{2}$ possiamo scegliere come sottointervalli bisecati il primo a destra e tutti i successivi necessariamente a sinistra, ovvero

$$[1/2, 1] \supset [1/2, 1/2 + 1/4] \supset [1/2, 1/2 + 1/8] \dots,$$

e così via, la formula precedente fornisce (verificate) $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0, \dots$, e corrisponde alla scrittura banale

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ma possiamo anche scegliere per $x = 1/2$ la prima bisezione a sinistra, e tutte le successive a destra, ovvero

$$[0, 1/2] \supset [1/4, 1/2] \supset [1/8, 1/2] \ldots$$

e questo fornisce $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1, \ldots$, ovvero

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Quindi per ogni numero reale $x \in [0, 1]$ siamo in grado di costruire una successione s_n a valori in $\{0, 1\}$, legata ad x dalla relazione $x = \sum_n \frac{s_n}{2^n}$ e questo è confortante. Ma abbiamo il problema che questa successione non è unica per molti numeri, i razionali diadici. Comunque abbiamo chiaramente ottenuto, guardando l'aspetto positivo, il seguente risultato, che non ho espressamente formulato a lezione, ma vorrei scrivere per chiarezza.

2.6. Teorema *Ogni reale $x \in [0, 1]$ che non sia un razionale diadico si scrive in modo unico nella forma*

$$x = \sum_1^\infty \frac{s_n}{2^n}$$

con $s_n \in \{0, 1\}$. La corrispondenza

$$x \to (s_n)$$

è biunivoca tra l'insieme di tali x e l'insieme delle successioni a valori in $\{0, 1\}$ che non siano definitivamente nulle o definitivamente 1. In particolare, l'insieme di tali numeri reali x in $[0, 1]$ è non numerabile.

Dim. Se un reale $x \in [0, 1]$ non è diadico, ad ogni passo della bisezione la scelta del sottointervallo che lo contiene nel processo di bisezione è unica. Si ha $s_n = 0$ se e solo se x appartiene alla metà sinistra di $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ e $s_n = 1$ se e solo se appartiene alla metà destra. Osserviamo che s_n non può essere definitivamente nulla, altrimenti la serie che la lega ad x mostrerebbe che x è un razionale diadico. Per lo stesso motivo, s_n non può essere definitivamente 1 perché la stessa serie in questo caso avrebbe un resto del tipo

$$\sum_{n=N}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{N-1}},$$

quindi tenendo conto che

$$x = \sum_1^{N-1} \frac{s_n}{2^n} + \sum_N^\infty \frac{s_n}{2^n},$$

x sarebbe un razionale diadico.

Quindi la mappa $f : x \to (s_n)$ che ad x associa questa successione è ben definita. Se $f(x) = f(y)$, le successioni associate coincidono, quindi le due successioni di intervalli incapsulati corrispondenti a x e y coincidono, ne segue $x = y$ per il teorema degli intervalli incapsulati. Questo mostra che f è iniettiva. D'altra parte se iniziamo con una arbitraria successione $s_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ possiamo costruire il reale x somma della serie $x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n}$. Si verifica facilmente che $x \in [0,1]$. La dimostrazione della suriettività di f è completata con il seguente esercizio, di cui ne abbiamo già svolto metà. Vi lascio la metà più interessante.

Esercizio Se $x = \sum_1^{\infty} \frac{s_n}{2^n}$ con $s_n \in \{0,1\}$ allora x è razionale diadico se e solo se s_n è definitivamente nulla o definitivamente 1.

(Osservare che l'informazione $s_1 = 0$ oppure $s_1 = 1$ permette di capire dove possa trovarsi x rispetto al punto $1/2$, e che per raggiungere $1/2$ come limite di una serie della forma $\sum_1^{\infty} \frac{s_n}{2^n}$ ci sono solo due possibilità, che sono quelle descritte precedentemente...)

Vogliamo andare avanti, superare il problema della non unicità dell'espansione binaria per tutti i reali di $[0,1]$ e mostrare che in effetti anche l'intervallo $[0,1]$ può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle successioni a due valori. Per questo, grazie al teorema di Schroder-Bernstein, ci basta mostrare che esistono due funzioni iniettive

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$$

$$g : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

Mostrare sia l'esistenza di f che quella di g solleva questioni interessanti. Per quanto riguarda l'esistenza di g, possiamo pensare di *scegliere* per ogni reale $x \in [0,1]$ una delle successioni a due valori (s_n) tra le varie possibili che realizzano x come $x = \sum \frac{s_n}{2^n}$. Se possiamo fare questo, otteniamo una funzione $g : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, che sarà necessariamente iniettiva: se due successioni associate a x e y rispettivamente coincidono, coincidono pure le serie corrispondenti, e quindi $x = y$.

Forniamo una spiegazione dell'esistenza di g. La non unicità della scrittura in forma diadica dei reali esiste *solo* per i razionali diadici, in base al teorema precedente. Potete svolgere il seguente esercizio.

Esercizio L'insieme $\{\frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ dei razionali diadici è numerabile (e denso).

Ne segue che il problema della scelta si presenta solo per una quantità numerabile di numeri, in quanto per i rimanenti c'è unicità della scrittura diadica. In questa situazione una funzione di scelta esiste grazie un *teorema*, che potete trovare nel libro di Berberian. È una conseguenza del principio di induzione.

Teorema (B. Theorem 1.11.1) Sia E un insieme non vuoto e numerabile. Allora è possibile scegliere un elemento per ogni sottinsieme non vuoto di E.

Quindi consideriamo l'insieme E delle successioni a valori in $\{0,1\}$ definitivamente nulle oppure definitivamente 1.

Esercizio Mostrare che E è numerabile.

È sufficiente considerare, per ogni razionale diadico $r = \frac{k}{2^n}$ il sottinsieme E_r di E costituito dalle successioni $(s_n) \in E$ tali che $\sum_n \frac{s_n}{2^n} = r$ (quante sono?) ed applicare il teorema precedente. Troviamo una funzione di scelta $g : r \to (s_n)$ definita su tali razionali, e la estendiamo ai reali x di $[0,1]$ non razionali diadici nell'unico modo possibile compatibile con la scrittura binaria di x.

Veniamo ora alla costruzione di una funzione iniettiva $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$. Dobbiamo rimuovere il problema della non unicità delle successioni a due valori che corrispondono ad uno stesso reale. La causa di quel problema erano i punti che appartengono a due intervalli nel processo di bisezione, i razionali diadici. Potremmo per esempio eliminare i razionali diadici, e restringere quindi l'attenzione al sottinsieme, chiamiamolo E, di $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ costituito dalle successioni non definitivamente nulle o non definitivamente 1. La costruzione fatta ci fornisce una mappa iniettiva

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \supset E \to [0,1].$$

Ci basterebbe dimostrare che questo sottinsieme in realtà può essere posto in corrispondenza biunivoca con tutto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Scegliamo però un'altra via, che è molto interessante, ed ha il vantaggio di essere raggiungibile dal il circolo di idee esposte fin qui.

Invece di pensare alle bisezioni di $[0,1]$, pensiamo alle *trisezioni*, ovvero alle sezioni successive di $[0,1]$ nei tre sottointervalli con la stessa lunghezza

$$[0,1] = [0,1/3] \cup (1/3,2/3) \cup [2/3,1].$$

Conviene fare un disegno di quello che sta succedendo.

Dall'intervallo $[0,1]$, rimuoviamo la parte centrale, l'intervallo *aperto* (=senza estremi)(1/3, 2/3), ci restano due intervalli chiusi (=con estremi) disgiunti. Effettuiamo la stessa procedura in ciascuno dei due, ovvero, li dividiamo mediante i punti 1/9 e 2/9 per il primo e 7/9, 8/9 per il secondo, e di entrambi rimuoviamo la parte centrale. Continuiamo così all'infinito...

L'insieme che resta dopo aver rimosso tutte le parti centrali, si chiama insieme di Cantor ternario.

Ma resta qualcosa nell'insieme di Cantor? Certamente, poiché rimuoviamo sempre intervalli aperti, i punti $0, 1/3, 2/3, 1$ restano nell'insieme di Cantor. Così pure restano i punti 1/9, 2/9, 7/9, 8/9 considerati al secondo passo. Continuando così vediamo che restano almeno una quantità numerabile di razionali *triadici*, ovvero del tipo $\frac{k}{3^n}$ con k intero. Non restano tutti, perché per esempio 4/9 e 5/9 sono stati rimossi.

Proviamo a sommare le lunghezze degli intervalli rimossi per avere un'idea di quanto possa essere esteso l'insieme di Cantor. Togliamo un intervallo di ampiezza 1/3, due di ampiezza 1/9, e così via. La somma viene

$$1/3 + 2/9 + 4/27 + \cdots = 1/3 \sum_0^{\infty} (2/3)^n = 1/3 \frac{1}{1-2/3} = 1.$$

Ovvero, l'insieme che abbiamo rimosso ha lunghezza uguale alla lunghezza di tutto $[0,1]$! Potrebbe venire quindi il dubbio che nell'insieme di Cantor non ci sia molto di più di quello già detto, e che sia quindi un insieme numerabile.

In effetti nell'insieme di Cantor ci sono molti più punti, ce ne sono una quantità non numerabile. Per vedere questo, imitiamo la costruzione della espansione binaria fatta precedentemente, usando ora la base ternaria. Questo vuol dire che possiamo sempre scrivere ogni $x \in [0,1]$ come

$$x = \lim_n a_n$$

dove gli a_n sono estremi sinistri di intervalli incapsulati $[a_n, b_n]$, ora di ampiezza $1/3^n$, che contengono x. Come prima, troviamo

$$x = \sum \frac{t_n}{3^n}$$

dove ora

$$t_n \in \{0, 1, 2\}.$$

Per un tale $x \in [0,1]$ generico sorgono come prima problemi di unicità della successione t_n legata ad x dalla precedente serie, esattamente in corrispondenza degli razionali triadici. Ma per i rimanenti reali il problema della non unicità non si presenta. Per esempio, il fatto che t_1 valga 0, 1 o 2 ci dice esattamente che x si trova in $(0, 1/3)$, $(1/3, 2/3)$, $(2/3, 1)$, rispettivamente. D'altra parte, $1/3$ ammette espansione triadica in due maniere, con t_n che assume valori in $\{0, 2\}$ oppure t'_n che assume valori in $\{0, 1\}$, e analogamente $2/3$ ammette espansione triadica con una successione a valori in $\{0, 1\}$ e un'altra a valori in $\{0, 2\}$. Queste osservazioni sono di guida nella risoluzione dei seguenti esercizi.

Esercizio Mostrare che i razionali triadici dell'insieme di Cantor ammettono una unica scrittura in serie triadica $x = \sum_n \frac{t_n}{3^n}$ con $t_n \in \{0, 2\}$.

Esercizio Mostrare che un numero reale x si può scrivere al più in un unico modo nella forma $x = \sum_1^\infty \frac{t_n}{3^n}$ con $t_n \in \{0, 2\}$.

2.7. Teorema *I punti dell'insieme di Cantor sono esattamente quelli che ammettono una espansione triadica della forma*

$$x = \sum \frac{t_n}{3^n}$$

con $t_n \in \{0, 2\}$*. Tale espansione è unica. In particolare, l'insieme di Cantor è in corrispondenza biunivoca con* $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$*, e quindi è non numerabile.*

Dim. Infatti, il fatto che t_n non possa mai assumere il valore 1 corrisponde al fatto che x non appartenga mai all'intervallo rimosso nella costruzione dell'insieme di Cantor.

Dim del Teorema 2.5 Sappiamo ora come costruire una mappa iniettiva

$$f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1].$$

È sufficiente associare ad una successione $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'elemento

$$x := \sum_{1}^{\infty} \frac{2s_n}{3^n},$$

e siamo sicuri di avere una mappa che assume valori in $[0,1]$ perché assume valori nell'insieme ternario di Cantor, che è un suo sottinsieme. La dimostrazione dell'iniettività di f, e quindi anche del teorema 2.5 è completata dagli esercizi precedenti.

Concludiamo con la seguente

Definizione Un insieme che può essere posto in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ si dice che ha la *cardinalità del continuo*.

Quindi $[0,1]$ e $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ hanno la cardinalità del continuo. E perfino l'insieme di Cantor, così sottile da sfuggire completamente quando si cerca di misurarne l'ampiezza, ha cardinalità del continuo, perché in corrispondenza biunivoca con le successioni a due valori.

In conclusione, i reali 'contengono molti più numeri' dei razionali perché con la prima dimostrazione di Cantor, che usa il teorem degli intervalli incapsulati, abbiamo visto che non sono numerabili. Tuttavia 'non ne contengono di più' dell'intervallo $[0,1]$ (che è un suo sottinsieme molto più piccolo) con cui possono infatti essere messi in corrispondenza biunivoca. Infine, l'intervallo $[0,1]$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle successioni a due valori tramite espansioni in base 2 e 3 grazie al teorema di SB. Questo fatto, oltre a fornire una seconda dimostrazione della non numerabilità dei reali grazie all'argomento diagonale di Cantor, ci mostra che le successioni a valori in $\{0,1\}$ (in cui non si richiede nulla sul comportamento asintotico per $n \to \infty$) 'sono molte di più' di quelle definitivamente nulle.