Esercizio 1.7. Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Si calcoli la probabilità che:

(i) nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);
(ii) nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Esercizio 1.8. Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

(i) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (Non semplificare i coefficienti binomiali)
(ii) Qual è la probabilità che finiscano nello stesso gruppo?

1.3 Probabilità condizionale e indipendenza

Nello studio di un modello probabilistico, risulta interessante analizzare l'influenza che il verificarsi di un dato evento B ha sulla probabilità di occorrenza di un altro evento A. Questo conduce alle nozioni di probabilità condizionale e di indipendenza di eventi, di importanza fondamentale.

1.3.1 Probabilità condizionale

Consideriamo un evento A di un esperimento aleatorio, che abbia probabilità $P(A)$. Se veniamo a conoscenza del fatto che un altro evento B si è verificato, come è sensato aggiornare il valore di $P(A)$ per tenere conto di questa informazione? La risposta è la probabilità condizionale (o condizionata) $P(A|B)$ di A sapendo B, che definiremo tra un momento.

Per motivare e "indovinare" la definizione, ritorniamo per un istante all'*interpretazione frequentista*. Ripetendo $N \gg 1$ volte l'esperimento aleatorio in condizioni "analoghe e indipendenti" e contando il numero $\mathscr{S}_N(A)$ di volte in cui l'evento A si verifica, si ha $P(A) \simeq \mathscr{S}_N(A)/N$. Per tenere conto dell'informazione aggiuntiva che l'evento B si è verificato, è naturale limitarsi a considerare le volte in cui l'esperimento ha dato esito in B, che sono in numero $\mathscr{S}_N(B)$, e contare in quante di queste volte anche A si è verificato, ossia $\mathscr{S}_N(A \cap B)$. Definendo la probabilità condizionale $P(A|B)$ come il rapporto di tali numeri, per N grande si ottiene

$$P(A|B) \simeq \frac{\mathscr{S}_N(A\cap B)}{\mathscr{S}_N(B)} = \frac{\mathscr{S}_N(A\cap B)/N}{\mathscr{S}_N(B)/N} \simeq \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Queste considerazioni euristiche motivano la seguente definizione.

Un utile corollario è il seguente.

Corollario 1.20 (Subadditività). *Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di eventi. Allora*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Dimostrazione. Sia $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$. Evidentemente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di eventi. Inoltre $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Per la parte (ii) della Proposizione 1.16, sappiamo che $P(A_1 \cup A_2) \le P(A_1) + P(A_2)$. Con una facile dimostrazione per induzione, la precedente disuguaglianza si estende a:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Ma allora, usando anche la Proposizione 1.19, si ha

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n),$$

che è la relazione cercata. □

Esercizi

Esercizio 1.1. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e siano $A, B \subseteq \Omega$ eventi.

(i) Si mostri che se $P(A) = P(B) = 0$ allora $P(A \cup B) = 0$.
(ii) Si mostri che se $P(A) = P(B) = 1$ allora $P(A \cap B) = 1$.

Esercizio 1.2. Rafforziamo l'esercizio precedente. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia *numerabile* di eventi.

(i) Si mostri che se $P(A_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.
(ii) Si mostri che se $P(A_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$.

Esercizio 1.3. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e sia $C \subseteq \Omega$ un evento.

(i) Si mostri che, se $P(C) = 1$, allora $P(A \cap C) = P(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.
(ii) Si mostri che, se $P(C) = 0$, allora $P(A \cup C) = P(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.

Esercizio 1.4 (Disuguaglianza di Bonferroni). Siano $A_1, \ldots, A_n$ eventi di uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \ge \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j).$$

In particolare, se $P(A_i \cap A_j) = 0$ per $i \neq j$, si deduca che $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.