ESAME SCRITTO DI MATEMATICA, 4/2/2016

1. Confrontare i numeri 9^{150} e 25^{100} (non e' strettamente necessario, puo' tuttavia essere utile conoscere $\log 3 = 1.1$, $\log 5 = 1.61$). $9^{150} = (9^{3/2})^{100}$ e' piu' grande di 25^{100}, dato che $9^{3/2} = 3^3 = 27 > 25$.

2. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{\log(\frac{x+1}{x-1})}$ Innanzi tutto $x \neq 1$, poi deve essere $\frac{x+1}{x-1} > 0$, per poter calcolare il logaritmo. Ma, dovendo essere il logaritmo non negativo, deve essere $\frac{x+1}{x-1} \geq 1$. Per gli $x > 1$, questo e' garantito dal fatto che $x + 1 \geq x - 1$ per ogni x reale; per gli $x < 1$, questo non puo' accadere dato che equivale a $x + 1 \leq x - 1$ che non e' vero per nessun x reale. Il dominio e' l'insieme dei reali $x > 1$.

3. Invertire, se e' possibile, la funzione $x|x| + 2x$. Per $x > 0$ la funzione coincide con $x^2 + 2x$, che e' crescente in x (derivata positiva), per $x < 0$ la funzione coincide con $-x^2 + 2x$, che e' ugualmente crescente in x (derivata positiva). In piu' la funzione e' continua e vale 0 in 0. Quindi la funzione e' invertibile, chiamiamo dunque x il valore dell'inversa nel punto y. Per $y > 0$ risolvendo $x^2 + 2x = y$, con $x \geq 0$ otteniamo $x = -1 + \sqrt{1+y}$, mentre per $y < 0$ risolvendo $-x^2 + 2x = y$, con $x < 0$ otteniamo $x = 1 - \sqrt{1-y}$. Ovviamente per $y = 0$ si ha $x = 0$.

4. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{-\log(\cos x)}{x^2}$. Si tratta di una forma indeterminata 0/0. La derivata prima del numeratore e' e' $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ che e' nulla in 0. Quella del denominatore $2x$, nulla in 0. Derivando ulteriormente il numeratore si ha $\frac{1}{\cos^2 x}$, che vale 1 in 0, mentre al denominatore otteniamo 2. Quindi il limite richiesto e' 1/2.

5. Disegnare il grafico di massima della funzione $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{1+|x|}$, motivandone adeguatamente la forma. Evidentemente si tratta di una funzione positiva, definita per $x \neq 0$. Il limite per $x \to 0+$ e' nullo, come quello per $x \to +\infty$ e' nullo. La derivata prima e' a meno di un fattore di segno positivo, uguale a $1 + x - x^2$. Questa e' una funzione quadratica che vale 1 in 0, cresce fino al suo punto di massimo ($x = \frac{1}{2}$) e poi decresce con continuita' fino a $-\infty$. Ne consegue che la funzione da studiare e' prima crescente, raggiunge un punto di massimo in corrispondenza dello zero della derivata, e poi decresce verso 0. Per $x < 0$ la funzione tende a $+\infty$ per $x \to 0-$, mentre per $x \to -\infty$ tende a 0. La derivata prima, a meno di un fattore di segno positivo, e' proporzionale a $1 - x + x^2$; stavolta si tratta di una funzione quadratica sempre positiva, e quindi la funzione e' sempre crescente.

6. Calcolare $\int \frac{1}{1+e^x} dx$, con la sostituzione di variabile $y = e^x$. Con la sostituzione di variabile $y = e^x$, da cui $dy = e^x dx$ e ancora $dx = \frac{dy}{y}$ l'integrale diventa $\int \frac{dy}{y(y+1)}$ e dato che $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$, si ha che l'ultimo integrale e' $\log |\frac{y}{y+1}| + C$ e quindi l'integrale di partenza e' $\log \frac{e^x}{1+e^x} = x - \log(1 + e^x) + C$.

7. Calcolare $-\int_0^1 \log x dx$. Integrando per parti, una primitiva di $-\log x$ risulta essere $-x \log x + x$ la cui variazione tra 1 e 0 e' uguale a 1. Infatti questa e' la variazione del secondo addendo, mentre il primo e' una funzione nulla in 1 il cui limite in 0+ e' uguale a 0.

8. Verificare che la funzione $2xe^{-x^2/2}$, definita per $x > 0$, e' una funzione di densita', calcolarne la funzione di distribuzione e la media. Per ispezione diretta la funzione e' la derivata di $-e^{-x^2/2}$. Questa e' una funzione crescente per $x > 0$, che vale -1 in 0 e tende a 0 per $x \to \infty$. La variazione tra 0 e $+\infty$ e' quindi 1, quindi la funzione assegnata, che ovviamente e' positiva, e' una densita'. La funzione di distribuzione e' $\int_0^x 2te^{-t^2/2} dx = [-e^{-t^2/2}]_0^x = 1 - e^{-x^2/2}$ e la media, integrando per parti, e' uguale a

$$\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2/2} dx = [-xe^{-x^2/2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$