SECONDO ESONERO, 4 FEBBRAIO 2016
COMPITO 1
1) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x 3^{2x^2+1} dx.$$

Risposta: Per prima cosa si osserva che la derivata di 3^{2x^2+1} e' $4x3^{2x^2+1}\log 3$, quindi la primitiva della funzione integranda e' $\frac{3^{2x^2+1}}{4\log 3}$.
2) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-2}^{0} \frac{1-3x}{x+3} dx.$$

Risposta: Osserviamo che

$$\frac{1-3x}{x+3} = \frac{1}{x+3} - 3\frac{x+3}{x+3} + \frac{9}{x+3} = \frac{10}{x+3} - 3.$$

La variazione della primitiva $10\log(x+3) - 3x$ tra -2 e 0 e' $10\log 3 - 6$.
3) Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{0} (2x-1)e^{2x} dx.$$

Risposta: Con il cambiamento di variabile $y = -2x$ ($dy = -2dx$) l'integrale diventa

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} (1+y)e^{-y} dy = -\frac{1}{2}(\Gamma(1) + \Gamma(2)) = -1$$

dato che $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.
4) Si consideri la seguente funzione, definita nell'intervallo $(-1, 1)$

$$f(x) = c(2 - |x|).$$

Determinare il valore della costante c in modo che f sia una funzione di densita', calcolare la corrispondente funzione di distribuzione, la varianza e la differenza interquartile.
Risposta: Dato che $\int_{-1}^{1}(2-|x|)dx = 2\int_0^1(2-x)dx = 3$, si ha che $c = \frac{1}{3}$. Per quanto riguarda la funzione di distribuzione sfruttiamo il fatto che f e' pari, quindi $F(x) - \frac{1}{2} = \int_0^x f(t)dt$ e' dispari. Per $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^x (2-t)dt = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x^2$$

per cui

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x|x|, -1 \leq x \leq 1.$$

(niente paura, e' solo un modo sintetico di scrivere assieme l'espressione per $x > 0$ e quella per $x < 0$!) Per la parita' di f la media (come del resto la mediana) e' nulla, mentre la varianza e'

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^2(2-x)dx = \frac{2}{3}(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{5}{18}.$$

Il terzo quartile si ottiene risolvendo

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x^2 = \frac{1}{4}$$

la cui soluzione nell'intervallo $[0, 1]$ e' $2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$. Dato che il primo quartile, per la parita' di f, e' opposto a questo, la differenza interquartile e' $4 - \sqrt{10}$.

COMPITO 2

1) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int 3x2^{-3x^2+2}dx.$$

Risposta: Per prima cosa si osserva che la derivata di 2^{-3x^2+2} e' $-6x2^{-3x^2+2}\log 2$, quindi la primitiva della funzione integranda e' $-\frac{2^{-3x^2+2}}{2\log 2}$.

2) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-1/3}^{1/3} \frac{3-x}{3x+2}dx.$$

Risposta: Osserviamo che

$$\frac{3-x}{3x+2} = \frac{3}{3x+2} - \frac{1}{3}\frac{3x+2}{3x+2} + \frac{2}{3(3x+2)} = \frac{11}{3(3x+2)} - \frac{1}{3}$$

La variazione della primitiva $\frac{11}{9}\log(3x+2) - \frac{x}{3}$ tra $-1/3$ e $1/3$ e' $\frac{11}{9}\log 3 - \frac{2}{9}$.

3) Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{0} (2x-2)e^{2x}dx$$

Risposta: Con il cambiamento di variabile $y = -2x$ ($dy = -2dx$) l'integrale diventa

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (2+y)e^{-y}dy = -\frac{1}{2}(2\Gamma(1) + \Gamma(2)) = -\frac{3}{2}$$

dato che $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

4) Si consideri la seguente funzione, definita nell'intervallo $(-1, 1)$

$$f(x) = c(1 + |x|).$$

Determinare la costante c tale che f sia una funzione di densita', calcolarne poi la funzione di distribuzione, la varianza e la differenza interquartile.

Risposta: Dato che $\int_{-1}^{1}(1+|x|)dx = 2\int_0^1(1+x)dx = 3$, si ha che $c = \frac{1}{3}$. Per quanto riguarda la funzione di distribuzione sfruttiamo il fatto che f e' pari, quindi $F(x) - \frac{1}{2} = \int_0^x f(t)dt$ e' dispari. Per $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^x (1+t)dt = \frac{x}{3} + \frac{1}{6}x^2$$

per cui

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{6}x|x|, -1 \leq x \leq 1.$$

(niente paura, e' solo un modo sintetico di scrivere assieme l'espressione per $x > 0$ e quella per $x < 0$!) Per la parita' di f la media (come del resto la mediana) e' nulla, mentre la varianza e'

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^2(1+x)dx = \frac{2}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{7}{18}.$$

Il terzo quartile si ottiene risolvendo

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{6}x^2 = \frac{1}{4}$$

la cui soluzione nell'intervallo $[0, 1]$ e' $\frac{\sqrt{10}}{2} - 1$. Dato che il primo quartile, per la parita' di f, e' opposto a questo, la differenza interquartile e' $\sqrt{10} - 2$.

COMPITO 3

1) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int 3x5^{-4x^2-2}dx.$$

Risposta: Per prima cosa si osserva che la derivata di 5^{-4x^2-2} e' $-8x5^{-4x^2-2}\log 5$, quindi la primitiva della funzione integranda e' $-\frac{3}{8\log 5}5^{-4x^2-2}$.

2) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^2 \frac{4-3x}{x+1}dx.$$

Risposta: Osserviamo che

$$\frac{4-3x}{x+1} = \frac{4}{x+1} - 3\frac{x+1}{x+1} + \frac{3}{x+1} = \frac{7}{x+1} - 3$$

La variazione della primitiva $7\log(x+1) - 3x$ tra 0 e 2 e' $7\log 3 - 6$.

3) Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^0 (x-1)e^{2x}dx.$$

Risposta: Con il cambiamento di variabile $y = -2x$ $(dy = -2dx)$ l'integrale diventa

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{y}{2}+1)e^{-y}dy = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\Gamma(2) + \Gamma(1)) = -\frac{3}{4}$$

dato che $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

4) Si consideri la seguente funzione, definita nell'intervallo $(-1, 1)$

$$f(x) = c(3 - |x|).$$

Si determini la costante c in modo che f sia una funzione di densita', se ne calcoli la funzione di distribuzione, la varianza e la differenza interquartile.

Risposta: Dato che $\int_{-1}^1(3-|x|)dx = 2\int_0^1(3-x)dx = 5$, si ha che $c = \frac{1}{5}$. Per quanto riguarda la funzione di distribuzione sfruttiamo il fatto che f e' pari, quindi $F(x) - \frac{1}{2} = \int_0^x f(t)dt$ e' dispari. Per $0 \le x \le 1$

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{5}\int_0^x(3-t)dt = \frac{3x}{5} - \frac{1}{10}x^2$$

per cui

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x}{5} - \frac{1}{10}x|x|, -1 \le x \le 1.$$

(niente paura, e' solo un modo sintetico di scrivere assieme l'espressione per $x > 0$ e quella per $x < 0$!) Per la parita' di f la media (come del resto la mediana) e' nulla, mentre la varianza e'

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = \frac{2}{5}\int_0^1 x^2(3-x)dx = \frac{2}{5}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{10}.$$

Il terzo quartile si ottiene risolvendo

$$\frac{3x}{5} - \frac{1}{10}x^2 = \frac{1}{4}$$

la cui soluzione nell'intervallo $[0, 1]$ e' $3 - \frac{\sqrt{26}}{2}$. Dato che il primo quartile, per la parita' di f, e' opposto a questo, la differenza interquartile e' $6 - \sqrt{26}$.

COMPITO 4

1) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int 3x2^{2x^2-2}dx.$$

Risposta: Per prima cosa si osserva che la derivata di 2^{2x^2-2} e' $4x2^{2x^2-2}\log 2$, quindi la primitiva della funzione integranda e' $-\frac{3}{4\log 2}2^{2x^2-2}$.

2) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-1/3}^{1/3} \frac{4-x}{3x+2}dx.$$

Risposta: Osserviamo che

$$\frac{4-x}{3x+2} = \frac{4}{3x+2} - \frac{3x+2}{3(3x+2)} + \frac{2}{3(3x+2)} = \frac{14}{3(3x+2)} - \frac{1}{3}$$

La variazione della primitiva $\frac{14}{9}\log(3x+2) - \frac{x}{3}$ tra $-1/3$ e $1/3$ e' $\frac{}{9}\log 3 - \frac{2}{9}$.

3) Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{0} (x-2)e^{2x}dx.$$

Risposta: Con il cambiamento di variabile $y = -2x$ ($dy = -2dx$) l'integrale diventa

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{y}{2}+2)e^{-y}dy = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\Gamma(2) + 2\Gamma(1)) = -\frac{5}{4}$$

dato che $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

4) Si consideri la seguente funzione definita nell'intervallo $(-1,1)$

$$f(x) = c(2+|x|)$$

Determinare la costante c in modo che f sia una funzione di densita', calcolarne la funzione di distribuzione, la varianza e la differenza interquartile.

Risposta: Dato che $\int_{-1}^{1}(2+|x|)dx = 2\int_0^1(2+x)dx = 5$, si ha che $c = \frac{1}{5}$. Per quanto riguarda la funzione di distribuzione sfruttiamo il fatto che f e' pari, quindi $F(x) - \frac{1}{2} = \int_0^x f(t)dt$ e' dispari. Per $0 \le x \le 1$

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{5}\int_0^x (2+t)dt = \frac{2x}{5} + \frac{1}{10}x^2$$

per cui

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{5} + \frac{1}{10}x|x|, -1 \le x \le 1.$$

(niente paura, e' solo un modo sintetico di scrivere assieme l'espressione per $x > 0$ e quella per $x < 0$!) Per la parita' di f la media (come del resto la mediana) e' nulla, mentre la varianza e'

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \frac{2}{5}\int_0^1 x^2(2+x)dx = \frac{2}{5}(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}) = \frac{11}{30}.$$

Il terzo quartile si ottiene risolvendo

$$\frac{2x}{5} + \frac{1}{10}x^2 = \frac{1}{4}$$

la cui soluzione nell'intervallo $[0,1]$ e' $\frac{\sqrt{26}}{2} - 2$. Dato che il primo quartile, per la parita' di f, e' opposto a questo, la differenza interquartile e' $\sqrt{26} - 4$.