## SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA PARZIALE, PROF. PICCIONI

| Cognome | Nome |
|---|---|

**REGOLE D'ESAME**

**a) Non é ammesso l'uso di libri, appunti, calcolatrici, cellulari, etc. Per ogni esercizio riportare il risultato indicando il procedimento di risoluzione**

**b) IL COMPITO DEVE ESSERE SVOLTO SU QUESTI FOGLI, CHE SONO GLI UNICI AD ESSERE CONSEGNATI AL DOCENTE PER LA CORREZIONE**

1) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2-x}{3-4x}dx$$

Risposta: Per prima cosa

$$\int \frac{2-x}{3-4x}dx = \int \frac{2}{3-4x}dx - \int \frac{x}{3-4x}dx$$

e dato che

$$\frac{x}{3-4x} = \frac{1}{4}\frac{4x-3+3}{3-4x} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4(3x-4)}$$

sostituendo si ottiene infine

$$\int \frac{2-x}{3-4x}dx = \int \frac{1}{4}dx + \int \frac{5}{4(3x-4)} = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}\log|3-4x|$$

Si osservi che la decomposizione desiderata della funzione integranda si ottiene anche calcolando il limite per $x \to \pm\infty$ (in questo caso $1/4$) e poi scrivendo la differenza della funzione dal suo valore limite come

$$\frac{2-x}{3-4x}dx - \frac{1}{4} = \frac{c}{4(3-4x)},$$

che riducendo il membro di sinistra allo stesso denominatore porta a $c = 5$. Questo perche' la funzione razionale differenza deve tendere a 0 a $\pm\infty$. Si prosegue poi come in precedenza. 2) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx.$$

Risposta: Dato che moltiplicando la funzione integranda per 3 si ottiene che il fattore al di fuori della radice e' la derivata della funzione sotto radice

$$\int 3x^2\sqrt{1+x^3}dx = \frac{2}{3}(1+x^3)^{3/2}$$

e quindi

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx = \frac{2}{9}[(1+x^3)^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{9}(2^{3/2}-1).$$

Alla stessa conclusione si perviene con la sostituzione $y = 1+x^3$, con $dy = 3x^2dx$, dato che

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 y^{1/2}dy.$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty}(x-1)^2e^{-x}dx.$$

Risposta: Dato che una primitiva di $e^{-x}$ e' $-e^{-x}$, integrando per parti e mandando a $+\infty$ l'estremo superiore di integrazione otteniamo

$$\int_0^{+\infty}(x-1)^2e^{-x}dx = -[(x-1)^2e^{-x}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}(x-1)e^{-x}dx = 1 + 2\int_0^{+\infty}(x-1)e^{-x}dx$$

e ripetendo l'operazione un'altra volta

$$\int_0^{+\infty}(x-1)e^{-x}dx = -[(x-1)e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -1+1 = 0.$$

Con procedimento piu' rapido, sviluppiamo il quadrato in modo che

$$\int_0^{+\infty}(x-1)^2 e^{-x}dx = \Gamma(3) - 2\Gamma(2) + \Gamma(1)$$

dove $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}$: Dato che $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(2) = 2\Gamma(1) = 2$ si conclude. Si noti che questo argomento e' legittimo in quanto gli addendi in cui abbiamo decomposto l'integrale sono tutti convergenti. Se avessimo trovato una forma $+\infty - \infty$ il procedimento non avrebbe permesso di concludere nulla sul'integrale cui eravamo interesssati. 4) Si consideri la funzione

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}, \quad -1 < x < 1$$

i) Determinare $\int_{-1}^1 h(x)dx$, e quindi normalizzare $h$ (moltiplicare $h$ per una costante $c$ opportuna) in modo che $f(x) = ch(x)$ divenga una funzione di densita' sull'intervallo $(-1,1)$; di questa ii) calcolare la funzione di distribuzione $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ (ripartizione)(suggerimento: separare il caso $0 \le x \le 1$ da $-1 \le x \le 0$); iii) calcolare la media $m = \int_{-1}^1 xf(x)dx$ e la mediana $F^{-1}(\frac{1}{2})$; iv) calcolare la varianza $\int_{-1}^1 (x-m)^2 f(x)dx$ ; v) calcolare la differenza interquartile $F^{-1}(\frac{3}{4}) - F^{-1}(\frac{1}{4})$.

Risposta: Dato che $h(x) \to +\infty$ per $x \to 0$ si tratta di un integrale improprio, che va quindi spezzato negli intervalli $[-1,0)$ e $(0,1]$. Tuttavia la parita' della funzione integranda ci permette di evitare il calcolo di tutti gli integrali sul segmento $[-1,0)$. Quindi

$$\int_{-1}^1 h(x)dx = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2[2\sqrt{x}]_0^1 = 4$$

da cui $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{|x|}}$ e' una funzione di densita' per $x \in [-1,1]$. Per la funzione di ripartizione osserviamo innanzi tutto che $F(0) = \frac{1}{2}$ dato che $f$ e' pari, e quindi per $0 < x \le 1$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{4\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\sqrt{t}]_0^x = \frac{1+\sqrt{x}}{2}$$

mentre per $-1 \le x < 0$

$$F(x) = 1 - F(-x) = \frac{1-\sqrt{-x}}{2}.$$

Ora la funzione $xf(x)$ e' una funzione dispari che, essendo limitata in modulo da $f(x)$ per $x \in [-1,1]$, certamente e' integrabile in questo intervallo (in effetti in questo caso e' proporzionale in modulo a $|x|^{1/2}$), quindi e' addirittura una funzione continua. L'integrale in $(0,1]$, quindi compensa esattamente quello in $[-1,0)$, quindi la media, essendo $\int_{-1}^1 xf(x)dx$, e' nulla. Dal fatto che $F(0) = \frac{1}{2}$ si deduce immediatamente che la mediana e' nulla. Per quanto riguarda la varianza, dato che la media e' nulla e' uguale a

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{4\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{3/2}dx = \frac{1}{5}$$

mentre $F(x) = 3/4$ equivale a $F(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ e quindi a

$$\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{4}$$

e quindi il terzo quartile e' uguale a $\frac{1}{4}$. Per simmetria il primo quartile e' allora $-\frac{1}{4}$ e la differenza interquartile uguale a $\frac{1}{2}$.

5) (semplificato) Risolvere lo stesso esercizio precedente per la funzione $h(x) = 1 - |x|$ per $-1 < x < 1$, che e' continua in questo intervallo.

Risposta: Di nuovo la parita' della funzione integranda ci permette di evitare il calcolo di tutti gli integrali sul segmento $[-1,0]$. Quindi

$$\int_{-1}^1 h(x)dx = 2\int_0^1 (1-x)dx = 1$$

con ovvie condizioni geometriche sul grafico della funzione. Quindi $c = 1$ e $h(x) = f(x)$, una funzione di densita'. La funzione di ripartizione si puo' nuovamente trattare con considerazioni geometriche: se $x > 0$ l'area sottesa al grafico tra $-1$ e $x$ si ottiene togliendo ad 1 l'area di un triangolo rettangolo con i due cateti uguali a $1 - x$, per cui

$$F(x) = 1 - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{1}{2} + x(1 - \frac{x}{2}), x \geq 0, F(x) = 1 - F(-x) = \frac{1}{2} + x(1 + \frac{x}{2}), x \leq 0$$

per cui le due formule possono essere accorpate nella forma valida per $x \in [-1, 1]$

$$F(x) = \frac{1}{2} + x(1 - \frac{|x|}{2})$$

La funzione $xf(x)$ e' una funzione dispari continua in $[-1, 1]$ quindi il suo integrale esteso a questo intervallo e' nullo. Dato che e' anche $F(0) = \frac{1}{2}$, si la media che la mediana sono nulle. Per quanto riguarda la varianza, dato che la media e' nulla essa e' uguale a

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)}dx = \frac{1}{12}$$

mentre $F(x) = 3/4$ equivale a $F(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ e quindi a

$$\frac{(1-x)^2}{2} = 14,$$

la cui soluzione $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ e' il terzo quartile, mentre il primo e' il suo opposto. La differenza interquartile e' quindi $2 - \sqrt{2}$.