GLOSSARIO SULLA SECONDA PARTE DEL CORSO DI MATEMATICA, PARTE PRIMA

INTEGRALI IMPROPRI

Primo tipo di integrali impropri, funzioni positive: Si consideri una funzione continua f definita su $[0, +\infty)$ a valori positivi. Per ogni $K > 0$ e' ben definito l'integrale $\int_0^K f(x)dx$, che sappiamo rappresentare l'area compresa tra il grafico della funzione f e l'asse delle ascisse, nell'intervallo $[0, K]$. Vista come funzione di K questa area e' evidentemente una funzione crescente di K a valori positivi: ne definiamo il limite per $K \to +\infty$ come l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$. Distinguiamo ovviamente due casi, a seconda che il limite e' $+\infty$ o un valore finito. Nel primo caso diremo che l'integrale e' divergente, nel secondo che l'integrale e' convergente. Osservando che al crescere di K l'area compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, K]$ va a"invadere" tutta l'area della regione compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse sull'intera retta reale positiva e' chiaro che se l'integrale diverge l'area della suddetta regione e' infinita, altrimenti la regione, pur essendo illimitata, ha area finita. La situazione piu' semplice da visualizzare e' quando la funzione f ha un asintoto orizzontale in 0. Naturalmente il fatto di aver posto uguale a 0 l'estremo inferiore di integrazione non gioca alcun ruolo speciale nella definizione: qualunque numero reale puo' sostituirlo.

Primo tipo di integrali impropri, estensioni: Se la funzione f ha segno negativo la definizione precdente continua ad aver senso, tranne che sia gli integrali definiti sugli intervalli limitati sia il loro limite hanno segno negativo: l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ si puo' anche ottenere considerando l'integrale improprio di $-f$ e cambiandolo di segno. Quando la funzione f assume valori di entrambi i segni la definizione data sopra necessita di particolare cautela, perche' il limite degli integrali sugli intervalli limitati puo' non esistere. Per garantirci la sua esistenza e poter continuare ad interpretare l'integrale improprio come differenza tra due aree conviene assumere che esista $c > 0$, per $x \geq c$, la funzione f mantenga sempre lo stesso segno. Infatti in questo caso possiamo suddividere l'integrale nei due intervalli $[0, c]$ e $[c, +\infty)$ in modo che nel primo la funzione sia continua e quindi l'integarle esista, e nel secondo la funzione f abbia segno costante. Si noti che questa suddivisione ha un valore unicamente teorico: in pratica, se si conosce una primitiva F di f l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ si calcola come $\lim_{K\to+\infty} F(K) - F(0)$, e ovviamente condizione necessaria e sufficiente per la sua convergenza e' che il primo termine sia finito. Naturalmente gli integrali impropri possono anche essere definiti su $(-\infty, 0]$ o piu' in generale su qualsiasi semiretta illimitata a sinistra.

Esempi fondamentali: potenze: Le funzioni x^{-a} on $a > 0$ hanno un asintoto orizzontale in 0. Gli integrali impropri $\int_1^{+\infty} x^{-a}dx$, con $a > 0$ si ottengono facilmente dato che la primitiva della funzione integranda e' $\log x$ se $a = 1$ o $\frac{x^{1-a}}{1-a}$ se $a \neq 1$, e una funzione di questo tipo ha un limite finito (in effetti nullo) a $+\infty$, se e solo se $a > 1$. Da cui se $0 < a \leq 1$ l'integrale diverge, mentre per $a > 1$ converge a $\frac{1}{a-1}$. Si noti che l'esistenza o meno di questi integrale impropri non dipende dall'estremo inferiore di integrazione, purche' esso sia positivo (le funzioni x^{-a} con $a > 0$ sono infinite in 0).

Altri esempi di integrali impropri convergenti di interesse:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{K\to+\infty} [1 - e^K] = 1.$$

Direttamente, o con il cambiamento di variabile $cx = y$ si prova che $\int_0^{+\infty} e^{-cx}dx = c^{-1}$, per $c > 0$ qualsiasi.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{K\to+\infty} \arctan K = \pi/2.$$

Infine (anche se la funzione $e^{-x^2/2}$ non ha come primitiva una funzione elementare)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Teoremi di confronto: Attraverso il confronto della funzione integranda f con un'altra funzione g (entrambe positive), quando x e' grande, possiamo trarre delle conseguenze sulla convergenza o meno di $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ da quella eventuale di $\int_0^{+\infty} g(x)dx$. In dettaglio:

a) Se esiste $c > 0$ tale che $0 < f(x) \leq cg(x)$ per $x \geq 0$, allora $\int_0^{+\infty} f(x)dx \leq c\int_0^{+\infty} g(x)dx$. Di conseguenza se il secondo integrale e' convergente, lo e' anche il primo (e ovviamente, se il primo non lo e', non lo puo' essere il secondo).

b) Se l'assunzione al punto a) e' vera solo per x sufficientemente grande, le conclusioni sulla convergenza degli integrali impropri continuano a valere anche se non necessariamente la disuguaglianza.

c) Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, allora si puo' prendere c uguale ad una costante positiva piccola a piacere e vale quindi la conclusione in b). Si noti che nel caso regolare in cui f e g sono infinitesime stiamo facendo l'ipotesi che $f = o(g)$ (f infinitesimo di ordine superiore rispetto a g).

d) Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ con $0 < l < \infty$ allora $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ e' convergente se e solo se lo e' $\int_0^{+\infty} g(x)dx$. Questo perche' in questo caso esistono $0 < c_1 < c_2$ tale che $c_1g(x) \leq f(x) \leq c_2g(x)$ per x sufficientemente grande. Questo significa che, ai fini della determinazione dell'esistenza dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, quando la funzione f e' espressa in forma fattorizzata, un fattore puo' essere sostituito con un suo equivalente (nel senso che il lrapporto del fattore con il suo equivalente tende ad un limite finito positivo, o al piu' oscilla tra due numeri positivi per x sufficientemente grande). In particolare, un fattore convergente ad un numero positivo per $x \to +\infty$ puo' essere trascurato ai fini della determinazione della convergenza dell'integrale improprio.

Applicazione importante: L'integrale improprio di una funzione razionale su di una semiretta $[a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$ (che non contiene zeri del denominatore) e' convergente se e solo se il grado del numeratore e' minore o uguale del grado del numeratore meno 2.

Altra applicazione fondamentale, gli integrali gamma: Per $a \geq 1$ la funzione $x^{a-1}e^{-x} = o(e^{-x/2})$, dato che il rapporto $\frac{x^{a-1}e^{-x}}{e^{-x/2}} = x^{a-1}e^{-x/2}$ tende a 0 per $x \to +\infty$, e l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-x/2}dx$ e' convergente. Di conseguenza e' convergente anche $\int_0^{+\infty} x^{a-1}e{-}xdx$, che e' una quantita' nota in matematica come $\Gamma(a)$. Tra poco saremo in grado di stabilire che quest'integrale e' convergente anche quando $0 < a < 1$ (il problema e' che la funzione integranda tende a $+\infty$ quando $x \to 0$). Integrando per parti si ottiene facilmente che $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$ quando $a > 1$. In particolare, se n e' un numero intero positivo, iterando questa relazione otteniamo $\Gamma(n) = (n-1)!$, il prodotto dei primi $n-1$ numeri interi positivi.

Integrale improprio di una funzione continua sull'intera retta reale: Finora abbiamo supposto che il segno di f sia costante quando x e' grande (per integrali su semirette illimitate a destra) e quando $-x$ e' grande (per integrali su semirette illimitate a sinistra), ma non e' detto che il segno sia lo stesso da ambo le parti. Tuttavia, supponiamo per il momento che questo accada (e sia, ad esempio, positivo). Si noti che questo accade in particolare quando la funzione e' pari. Allora l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ puo' essere definito come $\lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} f(x)dx$, mantenendo la solita interpretazione come differenza tra aree (l'area con contributo negativo e' necessariamente finita e l'integrale puo' divergere solo a $+\infty$ con la nostra assunzione sul segno). Piu' in generale l'integrale indefinto e' il limite degli integrali definiti su intervalli limitati in cui l'estremo inferiore converge a $-\infty$ e quello superiore a $+\infty$. Se invece l'ipotesi sul segno per x grande cade dobbiamo cambiare definizione. Ad esempio quando la funzione f e' dispari, allora $\int_{-K}^{K} f(x)dx = 0$ per ogni K qualunque sia la funzione f. Ma l'area compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse, quando la funzione e' positiva (necessariamente uguale all'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione, quando questa e' negativa) puo' ben essere infinita, e quindi vorremmo poter dire che in un caso simile l'integrale non esiste. Ad esempio la funzione dispari $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ha come primitiva $\log(1 + x^2)$ che tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$. Di conseguenza $\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{-\infty} f(x)dx = +\infty$. Per individuare le situazioni di questo tipo si adotta la seguente definizione: si sceglie una costante c arbitraria e si pone:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ciascuno dei due integrali al membro di destra e' del tipo definito in precedenza. Tuttavia possono presentarsi tre casi:

i) i due integrali sono finiti e quindi le due aree che contribuiscono, con segno opposto, al valore dell'integrale, sono finite:

ii) uno dei due integrali e' $\pm\infty$ e l'altro e' finito (oppure entrambi sono infiniti, ma con lo stesso segno) nel qual caso diciamo che l'integrale improprio diverge e c'e' una delle due suddette aree che e' infinita e l'altra finita;

iii) entrambi gli integrali sono infiniti ma con segno diverso nel qual caso diciamo che l'integrale non esiste ed entrambe le suddette aree sono infinite.

Si osservi che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ e' finito nel caso i), e uguale a $+\infty$ nei casi ii) e iii).

Integrale improprio di una funzione pari o dispari sull'intera retta reale: Nella definizione precedente, dato che il risultato non dipende dalla scelta di c, posiamo prendere $c = 0$ e stabilire che, se f e' dispari, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$ (se $\int_0^{+\infty} f(x)$ e' finito) oppure non esiste. Invece, se f e' pari $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx$. Esemplificazioni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|x|}dx = +\infty,$$

mentre

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \lim_{K\to\infty}(1 - e^{-\frac{K^2}{2}}) = 1, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1 + K^2) = +\infty,$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx \text{ non esiste.}$$

Secondo tipo di integrali impropri, funzioni positive: Si consideri una funzione continua f definita su $(0, 1]$ a valori positivi. Per fissare le idee consideriamo il caso regolare in cui $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Per ogni $K > 0$ e' ben definito l'integrale $\int_K^1 f(x)dx$, che sappiamo rappresentare l'area compresa tra il grafico della funzione f e l'asse delle ascisse, nell'intervallo

$[K,1]$. Vista come funzione di K questa area e' evidentemente una funzione decrescente di K a valori positivi: ne definiamo il limite per $K \to 0+$ come l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$. Distinguiamo ovviamente due casi, a seconda che il limite e' $+\infty$ o un valore finito. Nel primo caso diremo che l'integrale e' divergente, nel secondo che l'integrale e' convergente. Osservando che al decrescere di K l'area compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[K,1]$ va a"invadere" tutta l'area della regione compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nell'intero intervallo $(0,1]$ e' chiaro che se l'integrale diverge l'area della suddetta regione e' infinita, altrimenti la regione, pur essendo illimitata, ha area finita. Naturalmente considerazioni analoghe portano a definire integrali impropri su un qualsiasi intervallo limitato $[a,b]$ quando f e' (positiva e) continua su $(a,b]$ o su $[a,b)$ (se la funzione e' monotona, nel primo caso $x=a$ e' asintoto verticale, nel secondo $x=b$ e' un asintoto verticale).

Secondo tipo di integrali impropri, estensioni: Se la funzione f ha segno negativo la definizione precdente continua ad aver senso, tranne che sia gli integrali definiti su $[K,1]$ sia il loro limite hanno segno negativo: l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$ si puo' anche ottenere considerando l'integrale improprio di $-f$ e cambiandolo di segno. Quando la funzione f assume valori di entrambi i segni la definizione data sopra necessita di particolare cautela, perche' il limite degli integrali sugli intervalli limitati puo' non esistere. Per garantirci la sua esistenza e poter continuare ad interpretare l'integrale improprio come differenza tra due aree conviene assumere che la funzione f tenda a $+\infty$ o a $-\infty$ in $0+$ (cosi' che mantenga un segno vicino a 0). Infatti in questo caso possiamo suddividere l'integrale nei due intervalli $(0,c]$ e $[c,1]$ in modo che nel secondo la funzione sia continua e quindi l'integrale esista, e nel primo la funzione f abbia segno costante. Si noti che questa suddivisione ha un valore unicamente teorico: in pratica, se si conosce una primitiva F di f l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$ si calcola come $F(1)-\lim_{K\to 0+} F(K)$, e ovviamente condizione necessaria e sufficiente per la sua convergenza e' che il secondo termine sia finito. Naturalmente gli integrali impropri possono anche essere definiti su intervalli qualsiasi della forma $(a,b]$ o $[a,b)$.

Esempi fondamentali: potenze: Le funzioni x^{-a} on $a>0$, definite per $x>0$, hanno un asintoto verticale in 0. Gli integrali impropri $\int_0^1 x^{-a}dx$, con $a>0$ si ottengono facilmente dato che la primitiva della funzione integranda e' $\log x$ se $a=1$ o $\frac{x^{1-a}}{1-a}$ se $a\neq 1$, e una funzione di questo tipo ha un limite finito (in effetti nullo) a $0+$, se e solo se $a<1$. Da cui se $0<a<1$ l'integrale converge, mentre per $a>1$ converge a $+\infty$. Si noti che l'esistenza o meno di questi integrale impropri non dipende dall'estremo superiore di integrazione, purche' esso sia positivo.

Teoremi di confronto: Attraverso il confronto della funzione integranda f con un'altra funzione g (entrambe positive), quando x e' vicino a 0, possiamo trarre delle conseguenze sulla convergenza o meno di $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ da quella eventuale di $\int_0^{+\infty} g(x)dx$. In dettaglio:

a) Se esiste $c>0$ tale che $0<f(x)\leq cg(x)$ per $0<0\leq 1$, allora $\int_0^1 f(x)dx \leq c\int_0^1 g(x)dx$. Di conseguenza se il secondo integrale e' convergente, lo e' anche il primo (e ovviamente, se il primo non lo e', non lo puo' essere il secondo).

b) Se l'assunzione al punto a) e' vera solo per x sufficientemente piccolo, le conclusioni sulla convergenza degli integrali impropri continuano a valere anche se non necessariamente la disuguaglianza.

c) Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=0$, allora si puo' prendere c uguale ad una costante positiva piccola a piacere e vale quindi la conclusione in b). Si noti che nel caso regolare in cui f e g sono infinite in 0 stiamo facendo l'ipotesi che $f=o(g)$ (f infinito di ordine inferiore rispetto a g).

d) Se $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ con $0<l<\infty$ allora $\int_0^1 f(x)dx$ e' convergente se e solo se lo e' $\int_0^1 g(x)dx$. Questo perche' in questo caso esistono $0<c_1<c_2$ tale che $c_1 g(x)\le f(x)\le c_2 g(x)$ per x sufficientemente piccolo. Questo significa che, ai fini della determinazione dell'esistenza dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$, quando la funzione f e' espressa in forma fattorizzata, un fattore puo' essere sostituito con un suo equivalente (nel senso che il rapporto del fattore con il suo equivalente tende ad un limite finito positivo, o al piu' oscilla tra due numeri positivi per x sufficientemente piccolo). In particolare, un fattore convergente ad un numero positivo per $x\to 0+$ puo' essere trascurato ai fini della determinazione della convergenza dell'integrale improprio.

Applicazione importante: L'integrale improprio di una funzione razionale su di un intervallo limitato $[a,b)$ (o $(a,b]$) con $x=b$ asintoto verticale ($x=a$ asintoto verticale), che non contiene zeri del denominatore, non e' mai convergente.

Altra applicazione agli integrali gamma: Per $a<1$ la funzione $x^{a-1}e^{-x}$ e' equivalente a x^{a-1} vicino a $0+$, dato che il rapporto tra le due e^{-x} tende a 1 per $x\to 0+$. Dato che l'integrale $\int_0^1 x^{a-1}dx$ e' convergente se e solo se $0<a<1$, lo stesso e' vero per $\int_0^1 x^{a-1}e{-}xdx$. Consideriamo ora la funzione $f(x)=x^{a-1}e^{-x}$ sulla retta reale positiva, per $0<a<1$, che evidentemente ha sia un asintoto verticale in 0 che un asintoto orizzontale. Per una funzione integranda di questo tipo l'integrale sull'intera retta reale positiva si definisce mediante la suddivisione $\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{+\infty} f(x)dx$ di cui il primo e' del secondo tipo e il secondo del tipo gia' considerato. Per la funzione f cui siamo interessati entrambi gli integrali sono finiti, quindi l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx=\Gamma(a)$ e' convergente per $0<a<1$. In particolare si puo' dimostrare che $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

Integrale improprio sulla retta reale positiva di funzioni continue infinite in 0**:** La procedura di suddivisione dell'intervallo di integrazione utilizzata nell'esempio precedente permette di definire l'integrale improprio per funzioni continue qualunque, continue su $(0,+\infty)$. Naturalmente, se il segno della funzione vicino a 0 e' opposto a quello per x grande, allora la definizione puo' dar luogo ad una differenza tra infiniti, nel qual caso l'integrale non esiste. Se invece il segno e' lo stesso, la suddivisione non e' necessaria e l'integrale improprio si pu' ottenere come limite di integrali definiti su intervalli limitati della forma $[K_1,K_2]$ con $K_1<K_2$ al tendere di K_1 a 0 e di K_2 a $+\infty$, anche se questi fossero legati l'uno all'altro, come nel caso $K_1=K_2^{-1}$. La suddivisione ha in ogni cso il vantaggio di separare i problemi di convergenza legatii all'asintoto vericale da quelli legatii all''asintoto orizzontale.

Esempio particolarmente importante: Per quanto gia' visto $\int_0^{+\infty} x^{-a}dx=\int_0^1 x^{-a}dx+\int_1^{+\infty} x^{-a}dx$ e' sempre $+\infty$ dato che lo e' uno dei due addendi (per $a\ge 1$ il primo e per $0<a\le 1$ il secondo).

Integrale improprio di una funzione continua in un intervallo tra due asintoti. Considerazioni analoghe al caso precedente si possono applicare a questo caso. Consideriamo in particolare delle funzioni della forma $f(x)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ nell'intervallo $(0,1)$. Per quanto rigarda la convergenza di $\int_0^1 f(x)dx=B(a,b)$ abbiamo quattro casi:

i) Se $a\ge 1$ e $b\ge 1$ la funzione e' continua in $[0,1]$, quindi l'integrale e' finito;

ii) Uno tra a e b e' maggiore o uguale a 1, l'altro compreso tra 0 e 1, nel qual caso la funzione ha un asintoto in uno degli estremi, ma e' continua nell'altro. Si tratta quindi di un integrale improprio del secondo tipo che e' ancora finito. Ad esempio, se $0<a<1$ e $b\ge 1$ l'asintoto e' in 0 e la funzione integranda $\frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}}$ e' equivalente in 0 a $\frac{1}{x^{1-a}}$, il cui integrale e' convergente per $a>0$ in $(0,1]$.

iii) Sia a che b sono compresi tra 0 e 1, nel qual caso la funzione e' continua tra i due asintoti

$x = 0$ e $x = 1$. L'integrale si spezza come somma dell'integrale improprio in $(0, \frac{1}{2}]$ e di quello in $[\frac{1}{2}, 1)$, che sono entrambi finiti per quanto detto al punto precedente. Il caso particolare $a = b = \frac{1}{2}$ puo' essere trattato in modo semplice senza bisogno di suddividere l'intervallo di integrazione dato che la funzione integranda e' positiva e si conosce una primitiva.

iv) Se a o b e' negativo, allora lo stesso procedimento di suddivisione dell'intervallo di integrazione dei punti precedenti porta alla divergenza di almeno uno deglia addendi (es. se $a < 0$ la funzione integranda e' equivalente vicino a 0 a $\frac{1}{x^{1-a}}$ con $1-a > 1$, che rende l'integrale divergente).

La funzione beta di $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: La primitiva di $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ si determina con il cambiamento di variabile $y = 2x - 1$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \arcsin y = \arcsin 2x - 1$$

la cui variazione nell'intervallo $(0, 1)$ e' uguale a $\arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$, da cui $B(1/2, 1/2) = \pi$. Si puo' dimostrare che in generale $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$; sostituendo $\Gamma(1/2) = \pi$ si puo' immediatamente ottenere il risultato precedente.

La solita avvertenza: Quando integriamo una funzione continua tra due asintoti, se il segno con cui questi vengono avvicinati e' diverso, la suddivisione dell'intervallo di integrazione e' necessaria per evidenziare casi di non esitenza dell'integarli dovuti al fatto che sia l'area con contributo positivo che l'area con contributo negativo sono infinite. Ad esempio la funzione dispari $\tan x$ tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ non ha integrale nullo, dato che sebbene la primitiva $-\log(\cos x)$ sia pari, e quindi la variazione in qualsiasi intervallo simmetrico rispetto all'origine sia nulla, si ha

$$\int_0^{\pi/2} \tan x = - \lim_{K \to \frac{\pi}{2}-} \log(\cos(K)) = +\infty,$$

e quindi l'integrale in questione non esiste.

La definizione generale di integrale improprio: Sulla base di quanto visto sinora, e' chiaro che possiamo definire l'integrale improprio di una funzione continua sulla retta reale tranne nei punti $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$ nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{N-1}}^{c_N} f(x)dx + \int_{c_N}^{+\infty} f(x)dx$$

dove il primo e l'ultimo integrale sono del primo tipo, e gli altri del secondo tipo di integrale improprio. Il primo e/o l'ultimo integrale mancano se l'integrale e' esteso ad una semiretta o ad un intervallo limitato.

Ultima avvertenza: Se dobbiamo integrare su di un intervallo limitato $[a, b]$ una funzione che e' continua su tutto l'intervallo tranne che in un punto interno c (perche' ha un asintoto verticale), bisogna necessariamente considerare separatamente gli integrali impropri $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$. L'integrale $\int_a^b f(x)dx$ e' la somma dei due se non ha la forma di diferenza tra infiniti. Se F e' una primitiva di f in (a, b), tranne ovviamente nel punto c, la formula $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ e' applicabile solo quando esista una F continua in c, il che equivale supporre la finitezza dei due intervalli in cui abbiamo suddiviso l'integrale desiderato. Si confronti la funzione $\frac{1}{|x|}$ che ha le primitive della forma $\ln x + C_1$ per $x > 0$ e della forma $\ln(-x) + C_2$ per $x < 0$. Tutte queste primitive tendono a $-\infty$ per $x \to 0+$ e $x \to 0-$, non e' possibile quindi rendere una di queste continua in 0. Parallelamente per costanti a e b positive qualunque $\int_{-a}^{b} \frac{1}{|x|} dx = +\infty$. Si consideri invece una funzione della forma $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ che ha primitive della forma $2\sqrt{x} + C_1$ per $x > 0$ e $-2\sqrt{-x} + C_2$ per $x < 0$. Prendendo $C_1 = C_2$ si ottengono primitive che si raccordano con continuita' in 0, e stavolta

$$\int_{-a}^{b} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-a}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx + \int_{0}^{b} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2\sqrt{b} + 2\sqrt{a},$$

che e' la variazione di una qualunque primitiva continua in 0 nell'intervallo $[-a, b]$.