GLOSSARIO SULLA SECONDA PARTE DEL CORSO DI MATEMATICA

Popolazione statistica: Insieme di individui detti unita statistiche, di qualsiasi natura, su cui e possibile rilevare una serie di caratteri. Possiamo distinguere tra popolazioni reali, ad esempio una popolazione di neonati in una fissata citta' durante un fissato intervallo di tempo, e popolazioni virtuali, come l'insieme delle n-ple di neonati (con $n > 1$) scelti tra tutti i neonati della popolazione (campione).

Variabile statistica: La funzione che associa ad ogni individuo di una popolazione statistica, la modalita' che assume un certo carattere oggetto di studio.

Distribuzione di frequenza di una variabile statistica: La funzione che associa ad ogni modalita' di un carattere oggetto di studio in una popolazione statistica, la proporzione di individui che possiedono tale modalita'. Tali proporzioni sono evidentemente numeri postivi la cui somma, su tutte le modalita' possibili per il carattere, e' uguale a 1.

Osservazione: In queste definizioni assumiamo che la popolazione statistica sia finita, nel qual caso anche le modalita' di qualsiasi carattere (rilevabili su tale popolazione) saranno anch'esse finite e i valori della distribuzione di frequenza del carattere saranno numeri razionali. Tuttavia, se assumiamo che le unita statistiche abbiano un peso variabile (probabilita'), con la somma dei pesi di tutte le unita' uguale a 1, allora possiamo continuare a parlare di distribuzione di probabilita' (piuttosto che di frequenza) associando ad ogni modalita' la somma dei pesi degli individui che la possiedono. Addrittura possiamo consentire popolazioni costituite da un numero infinito di unita' statistiche con un numero infinito di modalita' (che devono tuttavia poter essere numerabili attraverso gli interi). Ovviamente queste popolazioni saranno necessariamente virtuali. Nella terminologia del calcolo delle probabilita' parliamo di spazi di probabilita' e di variabili aleatorie su questi definite.

Distribuzione di probabilita' binomiale: A partire da una popolazione statistica (binaria) i cui individui possono essre distinti in due categorie mutuamente escludentisi (che convenzionalmente possiamo codificare con i numeri 1 e 0) in proporzione p e $1-p$, formiamo la popolazione virtuale delle n-ple dei campioni di individui. La probabilita' di scegliere un campione con k individui (tra gli n scelti) che presentano la modalita' 1 e' allora, se la popolazione e' molto grande (per cui le estrazioni possono essere pensate indipendenti), pari a

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Il primo fattore (coefficiente binomiale) esprime il numero dei modi in cui si possono scegliere le estrazioni in cui vengono selezionate le unita' 1 mentre il secondo e' la probabilita' dell'uscita di k 1 e $n-k$ 0, in un ordine prefissato. Inserendo i coefficienti binomiali in una tabella con n quale indice di riga e k di colonna si ottiene un triangolo (detto di Tartaglia o di Pascal). Questo triangolo da' anche un algoritmo di calcolo dei coefficienti binomiali dato che possiamo ottenere tutte le scelte possibili di k oggetti tra n oggetti distinti andando a distinguere se queste scelte selezionano o meno un fissato oggetto. Ce ne sono $\binom{n-1}{k}$ che non lo fanno e $\binom{n-1}{k-1}$ che al contrario contengono l'elemento. Sommando questi due numeri (che troviamo sulla riga $n-1$ del triangolo, nelle posizioni al di sopra e immediatamente a sinistra di quella desiderata) si ottiene $\binom{n}{k}$. Si noti che la somma su k delle probabilita' binomiali, per un qualunque intero n ed un qualunque $p \in (0,1)$ e' uguale a 1 a questo si puo' verificare attraverso la celeberrima formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

valida per a e b qualunque, prendendo $a = p$ e $b = 1 - p$. Nel caso particolare $p = \frac{1}{2} = 1 - p$ (distribuzione binomiale simmetrica), si ha $a^k b^{n-k} = 2^{-n}$ e quindi la somma della n-esima riga di coefficienti binomiali e' 2^n. I coefficienti binomiali sono simmetrici rispetto al valore centrale $\frac{n}{2}$, nel senso che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, mentre un valore di $p < 1/2$ ($p > \frac{1}{2}$) sposta le probabilita' verso la sinistra (destra) della distribuzione (valori piu' piccoli (grandi) di $\frac{n}{2}$).

Distribuzione di probabilita' geometrica: e' associata ad una popolazione teorica formata mediante una procedura di campionamento di una popolazione binaria che si arresta una volta estratta per la prima volta un'unita' di tipo 1 (successo). La variabile che conta il numero di 0 (insuccessi) prima del primo successo ha una distribuzione che associa da' alla modalita' $k = 0, 1, 2, \ldots$ la probabilita' $(1-p)^k p$. Di nuovo la somma di queste probabilita' su k e' uguale a 1, nel senso che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k p = \lim_{N \to \infty} p \frac{1 - (1-p)^N}{1 - (1-p)} = p \frac{1}{p} = 1$$

dove abbiamo utilizzato la formula $\sum_{k=0}^{N-1} a^N = \frac{1-a^N}{1-a}$, valida per $a \neq 1$.

Istogramma: Mentre una distribuzione di probabilita' sugli interi puo' essere visualizzata con un grafico cartesiano in cui in ascissa, alla modalita' intera k, e' associata come ordinata la probabilita' di questa modalita', quando il carattere di interesse assume un continuo di valori (come altezza e peso), si utilizza (a causa del carattere discreto di un qualsiasi strumento di misura) un istogramma. In corrispondenza ad una intervallo di valori della variabile (misurato dallo strumento) si riporta un rettangolo che ha questo intervallo come base ed area proporzionale alla frequenza della classe. Al crescere della precisione dello strumento le classi divengono piu' piccole e l'istogramma sempre piu' irregolare, nel caso di popolazioni reali (finite).

Funzioni di densita': Dato che l' integrale definito di una funzione reale di variabile reale e' ottenuto come limite dell'area totale di un istogramma, sembra naturale considerare una funzione positiva f su di un intervallo $[a, b]$ tale che $\int_a^b f(x)dx = 1$ (detta funzione di densita') come la distribuzione di un carattere che assume un continuo di valori nell'intervallo $[a, b]$ in una popolazione teorica. La probabilita' che il carattere (variabile aleatoria) assuma valori in un intervallo $[c, d] \subset [a, b]$ si ottiene come $\int_c^d f(x)$. Diciamo in questo caso che la variabile aleatoria (di solito indicata con una lettera maiuscola) ha densita' di probabilita' f in $[a, b]$. Dato che sembra naturale consentire che questo intervallo possa essere illimitato siamo condotti a considerare la definizione degli integrali impropri o generalizzati.

Integrali impropri: Si consideri una funzione continua f definita su $[0, +\infty)$ a valori positivi. Per ogni $K > 0$ e' ben definito l'integrale $\int_0^K f(x)dx$, l'area tra il grafico della funzione f e l'asse delle ascisse, nell'intervallo $[0, K]$. Vista come funzione di K questa e' evidentemente una funzione crescente di K a valori positivi: se ne prendiamo il limte per $K \to +\infty$ possiamo ottenere $+\infty$ o un valore finito. In entrambi i casi definiamo l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ come questo limite: nel primo caso diremo che l'integrale e' divergente a $+\infty$, nel secondo che l'integrale esiste o e' convergente. Osservando che al crescere di K l'area tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, K]$ va a"invadere" tutta l'area tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse sull'intera retta reale positiva e' chiaro che se l'integrale diverge l'area della suddetta regione (che necessariamente e' illimitata) e' infinita, altrimenti l'integrale converge a quest'area. Si osservi che se la funzione f ha un asintoto orizzontale, cioe' $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \geq 0$ condizione necessaria per l'esistenza dell'integrale improprio e' che $a = 0$; infatti se $a > 0$ l'area sottesa alla curva contiene una striscia di lunghezza infinita con altezza a. (Nota per i matematici mancati: l'integrale improprio puo' esistere anche se il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste, cioe' f ha un comportamento oscillante all'infinito). Naturalmente il fatto che abbiamo posto uguale a 0 l'estremo inferiore di integrazione non gioca alcun ruolo speciale nella definizione. Se la funzione f e' negativa la definizione e' del tutto analoga: equivalentemente si fa l'integrale improprio di $-f$ e lo si cambia di segno. Piu' in generale la funzione f puo' assumere valori di entrambi i segni, anche se per l'interpretazione dell'integrale improprio come differenza tra due aree conviene assumere che per x grande, f mantenga sempre lo stesso segno, di modo che una sola delle aree (tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse, quando la funzione e' positiva e tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione, quando questa e' negativa) sia illimitata, evitando quindi che possano essere entrambe di area infinita. In mdo del tutto analogo definiamo l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ per funzioni definite su $(-\infty, 0]$. Come gia' per gli integrali di funzioni continue su intervalli chiusi e limitati possiamo scambiare gli estremi di integrazione cambiando il segno agli integrali.

Esempi fondamentali: Gli integrali impropri $\int_{1}^{+\infty} x^{-a}dx$, con $a > 0$ si ottengono facilmente dato che la primitiva della funzione integranda e' $\log x$ se $a = 1$ o $\frac{x^{1-a}}{1-a}$ se $a \neq 1$. Da cui se $0 < a \leq 1$ l'integrale diverge, mentre per $a > 1$ converge a $\frac{1}{a-1}$. Di conseguenza le funzioni $(a-1)x^{-a}$ sono quindi delle funzioni di densita' sull'intervallo $[1, +\infty)$, per $a > 1$ (dette densita' di Pareto). Si noti che l'esistenza o meno di questi integrale impropri non e' evidentemente influenzata dall'estremo inferiore di integrazione, purche' esso sia positivo (le funzioni x^{-a} con $a > 0$ sono infinite in 0).

Altri esempi di interesse in probabilita':

Per qualunque $c > 0$ si ha che $\int_0^K e^{-cx}dx = -\frac{1}{c}[-e^{-cK}]_0^K = \frac{1-e^{-cK}}{c}$ per $K > 0$, e quindi $\int_0^{+\infty} e^{-cx}dx = 1$, quindi ce^{-cx} e' una funzione di densita' sulla retta reale positiva (detta esponenziale negativa).

Un altro esempio e' $\int_0^K \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan K$ e quindi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi/2$.

Infine $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ (ma le primitive della funzione $e^{-x^2/2}$ non sono funzioni elementari).

Teoremi di confronto. Attraverso il confronto della funzione integranda f con un'altra funzione g, per x grande, possiamo trarre delle conseguenze sull'esistenza o meno di $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ a partire da quella di $\int_0^{+\infty} g(x)dx$. Per stabilire questi teoremi e' sufficiente l'interpretazione dell'integrale come differenza di aree e la immediata considerazione che, se c e' una costante, $\int_0^{+\infty} cf(x)dx = c\int_0^{+\infty} f(x)dx$, nel senso che se il membro di sinistra e' infinito lo e' anche quello di destra e viceversa, altrimenti il'uguaglianza vale tra numeri reali (ovviamente finiti). Per non dover utilizzare sempre i valori assoluti supponiamo che f e g siano funzioni positive. In dettaglio:

Se esiste $c > 0$ tale che $0 < f(x) \leq cg(x)$ per $x \geq 0$, allora $\int_0^{+\infty} f(x)dx \leq cg(x)dx$. Di conseguenza se g e' integrabile (cioe' $\int_0^{+\infty} g(x) < +\infty$) allora anche f lo e', quindi se f non e' integrabile (cioe' $\int_0^{+\infty} f(x) = +\infty$) anche g non lo e'. Le asserzioni della frase precedente sono vere anche se la disuguaglianza $0 < f(x) \leq cg(x)$ per $x \geq x_0$, per un qualche $x_0 > 0$.

Se f e g sono infinitesime per $x \to +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (cioe' f e' infinitesima di ordine superiore rispetto a g), allora se g e' integrabile lo e' anche f, quindi se f non lo e' non lo e' nemmeno g.

Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ con $0 < l < \infty$ allora f e' integrabile se e solo se g e' integrabile. Questo significa che, ai fini dell'esistenza dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, se la funzione f e' espressa in forma fattorizzata, un fattore puo' essere sostituito con un suo equivalente (nel senso che il limite del rapporto con la funzione equivalente e' un numero finito diverso da zero). In particolare un fattore che converge ad un numero finito diverso da zero per $x \to +\infty$ puo' essere trascurato ai fini dell'esistenza dell'integrale improprio.

Applicazione: l'integrale improprio di una funzione razionale propria su di una semiretta $[a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$ (che non contiene gli zeri del denominatore) e' convergente se e solo se il grado del numeratore e' minore o uguale del grado del numeratore meno 2. Argomento: confronto con un'opportuna potenza negativa.

Applicazione: per $a > 1$ la funzione $x^{a-1}e^{-x} = o(e^{-x/2})$, dato che il rapporto $x^{a-1}e^{-x/2}$ tende a 0 per $x \to +\infty$, e $e^{-x/2}$ e' integrabile sulla retta reale positiva per $a \geq 1$. Di conseguenza esiste $\int_0^{+\infty} x^{a-1}e{-x}dx$, che e' una quantita' nota in matematica come $\Gamma(a)$. Integrando per parti si ottiene facilmente che $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$, valida quando $a > 1$. La funzione $\frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x}$ sul semiasse reale positivo e' una densita' detta densita' Gamma, per ogni $a > 0$ (il caso $0 < a < 1$ in cui la funzione e' infinita in 0 verra' trattato tra breve).

Integrale improprio di una funzione f continua definita sull'intera retta reale: si deve esprimere l'integrale come somma di due integrali estesi a $(-\infty, c]$ e $[c, +\infty)$, ciascuno dei quali si definisce come in precedenza. E' facile rendersi conto che il risultato non dipende dalla scelta del punto c. In alcuni casi esistono delle scelte convenienti del punto c. Ad esempio se la funzione integranda e' pari, scegliendo $c = 0$ otteniamo l'integrale sull'intera retta reale (se e' convergente) moltiplicando l'integrale sulla retta reale positiva per 2. In particolare:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = 2\frac{\pi}{2} = \pi$, e quindi $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ e' una funzione di densita' sull'intera retta reale, detta di Cauchy.

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = 2\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, e quindi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ e' una funzione di densita' sull'intera retta reale, detta Gaussiana o normale.

Osservazione: Consideriamo per semplicita' una funzione continua f positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Allora l'integrale improprio e' la differenza tra l'area compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse, dalla parte del semiasse positivo, e l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di f, dalla parte del semiasse negativo. Se queste due aree sono finite o se e' infinita una sola delle due la definizione adottata da' come risultato un numero reale o $+\infty$ o $-\infty$. Ma se entrambe le aree sono infinite si ottiene formalmente $+\infty - \infty$ il che significa che l'integrale non e' definito neanche nella retta reale estesa. Si osservi inoltre che se f e' una funzione dispari definita su tutto l'asse reale, allora $\int_{-K}^{K} f(x)dx = 0$ e quindi, se si definisse l'integrale esteso all'intera retta reale come limite di integrali su $(-K, K)$ al tendere di K a $+\infty$ si otterrebbe 0 in ogni caso. Invece l'integrale improprio o non esiste, perche' l'area tra il grafico e l'asse delle ascisse per ascisse positive e' infinita (e quella tra l'asse delle ascisse e il grafico per ascisse negative lo e' ugualmente, e va presa con segno negativo) e solo in caso contrario e' uguale a 0i.

Esemplificazione:

Mentre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \lim_{K\to\infty}(1 - e^{-\frac{K^2}{2}}) = 1$$

e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$, al contrario $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}$ non esiste perche'

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+K^2) = +\infty.$$

Osservazione ulteriore: S noti che la divisione dell'intervallo di integrazione nella definizione di integrale improprio serve a segnalare le situazioni indeterminate di cui sopra. Se la funzione integranda ha segno costante, invece la suddivisione in due parti dell'intervallo di integrazione non e' necessaria e si ottiene l'integrale improprio come limite di un integrale su di un intervallo limitato, basta che l'estremo inferiore e l'estremo superiore di integrazione tendano rispettivamente a $-\infty$ e a $+\infty$.

Altro tipo di integrali impropri: La definizione dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$ nel caso in cui f e' continua in $(0,1]$ (e quindi puo' tendere a $\pm\infty$ in 0 e' del tutto analogo. Conviene assumere che f tenda a $+\infty$ o $-\infty$ in 0 per cui ha un segno fissato vicno a 0. Se per definitezza assumiamo che sia $+\infty$ abbiamo che $\int_0^1 f(x)dx$, definito come $\lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 f(x)dx$ e' finito o $+\infty$ e la solita interpretazione in termini di aree. In particolare i teoremi di confronto continuano a valere.

Esempi fondamentali: Gli integrali impropri $\int_0^1 x^{-a}dx$ con $a>0$ convergono solo per $a<1$, nel qual caso sono uguali a $\frac{1}{1-a}$. Cosi la funzione $(1-a)x^{-a}$ sull'intervallo $(0,1]$ e' una densita', che appartiene alla famiglia beta che verra' tra breve introdotta in generale. Utilizzando i teoremi di confronto, quindi, si ha che una funzione razionale non e' mai integrabile in un intervallo che contenga un asintoto (al solito, il fatto che abbia supposto che l'asintoto sia in 0 e' semplicemente per comodita' di scrittura.

Asintoto come estremo superiore di integrazione: si tratta nello stesso modo, ad esempio

$$\int_0^{\pi/2}\tan x = -\lim_{\delta\to 0+}\log(\cos(\frac{\pi}{2}-\delta)) = +\infty.$$

Integrale improprio in $[0,1]$ (o in un qualsiasi intervallo limitato) quando f e' continua solo all'interno dell'intervallo: dato che puo' essere che $\lim_{x\to 1-} f(x)$ sia infinito ma opposto a $\lim_{x\to 0+} f(x)$ per prevenire cancellazioni "spurie" occorre suddividere l'integrale in un punto $c\in(0,1)$ e trattare per suo conto gli integrali impropri in $(0,c]$ e $[c,1)$. Sommando questi si ottiene l'integrale desiderato, che naturalmente puo' non esistere, come nel caso $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\tan x$ (perche'?). Piu' in generale, suddividendo l'intervallo di integrazione in un numero finito di intervalli che siano o illimitati solo da un lato o contengano una singolarita' (punto dove la funzione non e' continua) solo in un estremo, possiamo allargare ulteriormente la definizione di integrale improprio. Trattiamo alcuni esempi particolari.

Esempio particolare: Per quanto gia' detto sugli esempi fondamentali $\int_0^{+\infty} x^{-a}dx = \int_0^1 x^{-a}dx + \int_1^{+\infty} x^{-a}dx$ e' sempre $+\infty$ dato che lo e' uno dei due addendi.

Esempio particolare: $\int_0^{+\infty} x^{-a}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{-a}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{-a}e^{-x}dx$ e' finito per $0<a<1$. Il secondo termine e' stato gia' precdentemente considerato. Per l'esistenza del primo, invece la funztone esponenziale, che vale 1 in 0 puo' essere trascurata, e si cade sull'esempio fondamentale di potenza negativa.

Esempio particolare: Per quanto gia' detto esiste $\int_0^1 x^{-a}(1-x)^{-b}dx$ per $0<a<1$ e/o $0<b<1$. D'altra parte l'integrale non e' improprio quando a e b sono negativi. Normalizzando (dividendo per l'integrale) queste funzioni si ottengono gli elementi della famiglia beta di densita', di cui casi di interesse si ottengono per $a=b=0$ (densita' uniformemente uguale a 1) e $a=b=1/2$. In questo caso

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int --1^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = [\arcsin y]_{-1}^1 = \pi$$

con il cambiamento di variabile $y=2x-1$. Si noti che dato che l'integrando era positivo non e' stato necessario suddividere in due l'integrale improprio. La densita' $\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ si dice densita' dell'arcoseno. Piu' in generale si puo' dimostrare che

$$\int_0^1 x^{-a}(1-x)^{-b}dx = \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(2-a-b)}$$

per a e $b < 1$.