RECUPERO ESAME SCRITTO PARZIALE DI MATEMATICA, PROF. PICCIONI, 7/1/16

1) Mettere in ordine crescente dal più basso al più alto i seguenti numeri

$$5^{30}, 50^{20}, 500^{10}.$$

Risposta: Dato che $50^{20} = 5^{20}10^{20}$ e $500^{10} = 5^{10}(10^2)^{10} = 5^{10}10^{20}$ senza utilizzare esplicitamente i logaritmi si ha che $5^{30} < 5^{10}10^{20} < 5^{20}10^{20}$.

2) Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \log(e^{3x+2} - e^{5x+1})$$

Risposta: L'argomento del logaritmo deve essere positivo, e quindi, dato che la funzione esponenziale e una funzione strettamente crescente una x nel dominio della funzione deve soddisfare $3x + 2 > 5x + 1$ e quindi $x < 1/2$.

3) Determinare il dominio e verificare se la seguente funzione è iniettiva. In caso affermativo determinarne l'immagine e la funzione inversa

$$f(x) = \arctan(1/x)$$

Risposta: La funzione e definita sull'intera retta reale escluso $x = 0$. La sua immagine e l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ escluso lo 0 (dato che $1/x$ non puo valere 0 per x reale). Dato che l'inversa della funzione arcotangente e la tangente (nel suddetto intervallo) si ha $f^{-1}(y) = \frac{1}{\tan y}$ per $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $y \neq 0$.

4) Calcolare il seguente limite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^5}{(\sin x)^4}$$

Risposta: Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$ quindi applicando la regola de l'Hopital si ha che il limite richiesto uguaglia

$$\lim_{x\to 0} \frac{5(\cos x)^4 \sin x}{4(\sin x)^3 \cos x} = \frac{5(\cos x)^3}{4(\sin x)^2} = +\infty.$$

5) Studiare la funzione

$$f(x) = x^3 - 5x + \frac{4}{x}$$

Lo studio deve includere: la determinazione del dominio e di eventuali simmetrie, lo studio del segno, la determinazione dei limiti all'infinito e nei punti di singolarità, la determinazione degli intervalli di crescenza e decrescenza e dei punti di massimo e minimo relativo, con i relativi valori della funzione.

Risposta: Si tratta di una funzione dispari definita su tutta la retta reale tranne $x = 0$. A $-\infty$ e $0-$ il limte e $-\infty$, mentre a $+\infty$ e $0+$ il limite e' $+\infty$. Riscrivendo la funzione come

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x} = \frac{(x^2)^2 - 5(x^2) + 4}{x}$$

si riduce lo studio del segno a quello della funzione quadratica $t^2 - 5t + 4$ per t non negativo. Dato chegli zeri di detta funzione sono 1 e 4 il denominatore dell'espressione al membro di destra e positivo per $0 < |x| < 1$ e $|x| > 2 = \sqrt{4}$, e quindi, considerando che il denominatore cambia di segno sul semiasse negativo, la funzione e negativa in $(-\infty, -2)$, in $(-1, 0)$ e in $(1, 2)$, e positiva in $(-2, -1)$, in $(0, 1)$ e in $(2, +\infty)$. Si calcoli ora la derivata

$$f'(x) = 3x^2 - 5 - \frac{4}{x^2} = \frac{3x^4 - 5x^2 - 4}{x^2}$$

Al denominatore abbiamo di nuovo di una funzione quadratica nella variabile x^2. La funzione e negativa per $0 < x^2 < \frac{5+\sqrt{73}}{6}$ e positiva per $x^2 > \frac{5+\sqrt{73}}{6}$. Quindi $x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}}$ e un punto di minimo relativo (si vede facilmente che e compreso tra 1 e 2) alla sinistra del quale la funzione e decrescente (per $x > 0$) e alla destra crescente, mentre $x = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}}$ e un punto di massimo relativo alla sinistra del quale la funzione e crescente e alla destra decrescente (per $x < 0$). Per brevita si omette l'ovvia determinazione dei valori della funzione in questi due punti.

1) Mettere in ordine crescente dal più basso al più alto i seguenti numeri

$$2^{30}, 20^{20}, 200^{10}.$$

Risposta: Dato che $20^{20} = 2^{20}10^{20}$ e $200^{10} = 2^{10}(10^2)^{10} = 2^{10}10^{20}$ senza utilizzare esplicitamente i logaritmi si ha che $2^{30} < 2^{10}10^{20} < 2^{20}10^{20}$.

2) Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \log(e^{5x+2} - e^{3x+1})$$

Risposta: L'argomento del logaritmo deve essere positivo, e quindi, dato che la funzione esponenziale e una funzione strettamente crescente una x nel dominio della funzione deve soddisfare $5x + 2 > 3x + 1$ e quindi $x > -1/2$.

3) Determinare il dominio e verificare se la seguente funzione è invertibile. In caso affermativo determinarne l'immagine e la funzione inversa

$$f(x) = \frac{1}{\arctan x}$$

Risposta: La funzione e definita sull'intera retta reale escluso $x = 0$. La sua immagine e l'unione degli intervalli $(-\infty, -2/\pi)$ e $(2/\pi, +\infty)$. Dato che l'inversa della funzione arcotangente e la tangente (definita nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$) si ha $f^{-1}(y) = \tan(\frac{1}{y})$ per $y \in (-\infty, -2/\pi) \cup (\pi/2, +\infty)$.

4) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^3}{(\sin x)^2}$$

Risposta: Si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$ quindi applicando la regola de l'Hopital si ha che il limite richiesto uguaglia

$$\lim_{x\to 0} \frac{3(\cos x)^2 \sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{3\cos x}{2} = \frac{3}{2}.$$

5) Studiare la funzione

$$f(x) = -x^3 + 10x - \frac{9}{x}$$

Risposta: Si tratta di una funzione dispari definita su tutta la retta reale tranne $x = 0$. A $-\infty$ e $0-$ il limte e $+\infty$, mentre a $+\infty$ e $0+$ il limite e' $-\infty$. Riscrivendo la funzione come

$$f(x) = \frac{-x^4 + 10x^2 - 9}{x} = \frac{-(x^2)^2 + 10(x^2) - 9}{x}$$

si riduce lo studio del segno a quello della funzione quadratica $-t^2 + 10t - 9$ per t non negativo. Dato che gli zeri di detta funzione sono 1 e 9 il denominatore dell'espressione al membro di destra e negativo per $0 < |x| < 1$ e $|x| > 3 = \sqrt{9}$, e quindi, considerando che il denominatore cambia di segno sul semiasse negativo, la funzione e positiva in $(-\infty, -3)$, in $(-1, 0)$ e in $(1, 3)$, e negativa in $(-3, -1)$, in $(0, 1)$ e in $(3, +\infty)$. Si calcoli ora la derivata

$$f'(x) = -3x^2 + 10 + \frac{9}{x^2} = \frac{-3x^4 + 10x^2 + 9}{x^2}$$

Al denominatore abbiamo di nuovo di una funzione quadratica nella variabile x^2. La funzione e positiva per $0 < x^2 < \frac{5+\sqrt{52}}{3}$ e negativa per $x^2 > \frac{5+\sqrt{52}}{3}$. Quindi $x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{52}}{3}}$ e un punto di massimo relativo (si vede facilmente che e compreso tra 1 e 3) alla sinistra del quale la funzione e crescente (per $x > 0$) e alla destra decrescente, mentre $x = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{52}}{3}}$ e un punto di minimo relativo alla sinistra del quale la funzione e decrescente e alla destra crescente (per $x < 0$). Per brevita si omette l'ovvia determinazione dei valori della funzione in questi due punti.