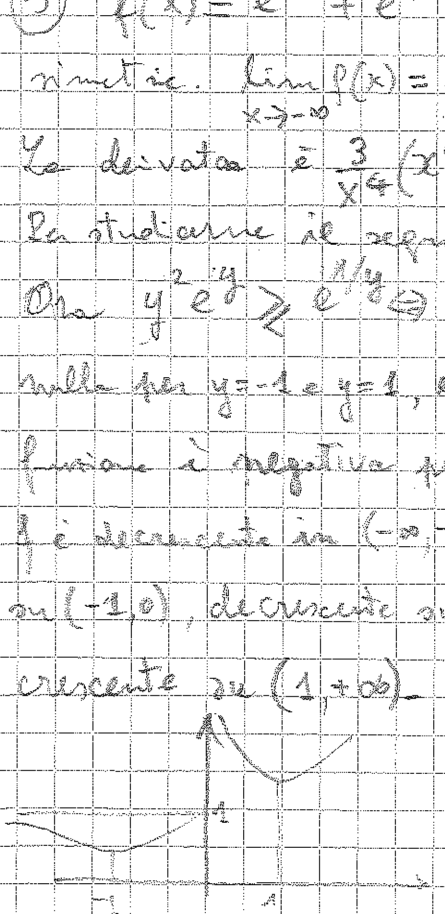
(1) Ordinare 7^{20}, 70^{10}, 700^5. Prendendo i logaritmi in base 10
$\log 7^{20} = 20\log 7$, $\log 70^{10} = 10\log 7+10$, $\log 700^5 = 5\log 7+10$
da cui immediatamente $700^5<70^{10}$ e $7^{20}<70^{10}$, essendo $0<\log 7<1$.
Ma $5\log 7+10<20\log 7 \iff 10<15\log 7 \iff \frac{2}{3}<\log 7 \iff 10^{2/3}<7 \iff 100<7^3$
da cui $700^5<7^{20}$.

(2) Dominio di $\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}}$. La funzione sotto radice deve essere definita ($x\neq\pm2$) e non negativa. Ora le radici del numeratore sono 2 e 3, quindi il numeratore è negativo in $(2,3)$, il denominatore in $(-2,2)$ quindi il dominio richiesto è $(-\infty,-2)\cup[3,+\infty)$.

(3) Dire se $2x-|x|$ è invertibile e in caso affermativo determinarne l'inversa. La funzione è uguale a x per $x\geq0$, a $3x$ per $x<0$, quindi manda (biunivocamente) i positivi nei positivi, i negativi nei negativi, 0 in 0. La funzione è invertibile. Risolvendo $x=y$ per $y\geq0$ fissato, si ha la soluzione y, invece risolvendo $3x=y$, $x=y/3$ per $y<0$. Quindi $f^{-1}(y)=y$, per $y\geq0$, $f^{-1}(y)=y/3$, per $y<0$.

(4) $\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)^2}{x^2-x} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{2x-1}=0$ (forma indet. $\frac{0}{0}$, formula di H.)

(5) $f(x)=e^{x^3}+e^{1/x^3}$. $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, funzione positiva senza simmetrie. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$, $\lim_{x\to0^-}f(x)=1$, $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
La derivata è $\frac{3}{x^4}(x^6e^{x^3}-e^{1/x^3})$ che evidentemente è nulla in $+1$ e -1.
Per studiarne il segno basta considerare il fattore tra parentesi in funzione di $y=x^3$.
Ora $y^2e^y \gtrless e^{1/y} \iff 2\log|y|+y-\frac{1}{y} \gtrless 0$. Ora la funzione al membro di sinistra è nulla per $y=-1$ e $y=1$, e ha derivata $\frac{2}{|y|}+1+\frac{1}{y^2}>0$ per $y\neq0$. Ne consegue che la funzione è negativa per $y<-1$ e $0<y<1$, positiva per $-1<y<0$ e $y>1$. Quindi f è decrescente in $(-\infty,-1)$ (-1 punto di minimo locale con $f(-1)=\frac{2}{e}$), crescente su $(-1,0)$, decrescente su $(0,1)$ (1 punto di minimo locale con $f(1)=2e$) infine crescente su $(1,+\infty)$.



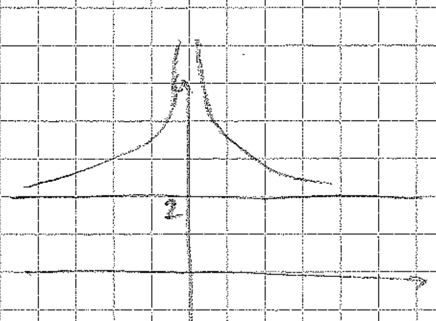
(1) Ordinare $3^{20}, 30^{10}, 300^5$. Prendendo i logaritmi in base 10 si ottiene $\log 3^{20} = 20 \log 3$, $\log 30^{10} = 10\log 3 + 10$, $\log 300^5 = 5\log 3 + 10$, da cui (a $\log 3 > 0$) $300^5 < 30^{10}$ e $3^{20} < 30^{10}$. Ma $20\log 3 < 5\log 3 + 10 \iff 15\log 3 < 10 \iff \log 3 < \frac{2}{3}$ $\iff 3 < 10^{2/3} \iff 3^3 < 100$. Da cui $3^{20} < 300^5 < 30^{10}$.

(2) Il dominio di $\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}}$. La funzione sotto radice deve essere definita (per cui $x \neq \pm 3$) e non negativa. Dato che il numeratore è negativo per $(2,3)$ e il denominatore è negativo in $(-3,3)$ il dominio sarà $(-\infty,-3) \cup [2,3) \cup (3,+\infty)$.

(3) Dire se $2x+|x|$ è invertibile e in caso affermativo determinare l'inversa. La funzione è uguale a $3x$, per $x \geq 0$, e uguale a x, per $x<0$, e manda i positivi nei positivi, i negativi nei negativi, e 0 in 0. La funzione è invertibile. Risolvendo $3x=y$ per $y \geq 0$ si ottiene $x = y/3$, risolvendo $x=y$ per $y<0$ si ottiene $x=y$. Di conseguenza $f^{-1}(y) = y/3$ per $y \leq 0$ e $f^{-1}(y) = y$, per $y<0$.

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1+\tan^2 x}{e^x} = 1$ (forma indeterminata $\frac{0}{0}$, formula di H.)

(5) $f(x) = e^{1/x^2} + e^{-1/x^2}$. Dominio $(-\infty, +\infty)$, funzione positiva e pari.
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
La derivata è $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\left(e^{1/x^2} - e^{-1/x^2}\right)$. Il segno della quantità tra parentesi è sempre positivo per $x \neq 0$, dato che $e^{y} > e^{-y}$ per $y = \frac{1}{x^2} > 0$. Dato che $-\frac{2}{x^3}$ ha il segno opposto ad x, si ha che $f'(x) > 0$ per $x<0$ e $f'(x)<0$ per $x>0$, quindi la funzione è crescente per $x<0$ e decrescente per $x>0$ (in accordo con la parità).



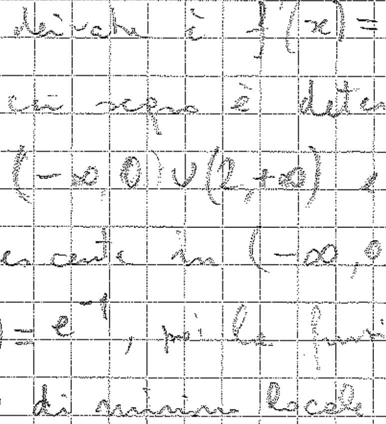
① Ordinare $7^{40}, 70^{20}, 700^{10}$. Prendendo i logaritmi in base 10 si ha
$\log 7^{40} = 40\log 7$, $\log 70^{20} = 20\log 7 + 20$, $\log 700^{10} = 10\log 7 + 20$, da cui ($0 < \log 7 < 1$)
$7^{40} < 70^{20}$, $700^{10} < 70^{20}$. Ma $10\log 7 + 20 < 40\log 7 \iff 20 < 30\log 7 \iff \frac{2}{3} < \log 7 \iff 10^{2/3} < 7$
$\iff 100 < 7^3$. Quindi anche $700^{10} < 7^{40}$.

② Il dominio di $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}}$. La funzione sotto radice deve essere ben definita ($x \neq \pm 1$) e non negativa. Dato che il numeratore è negativo in $(1,2)$ e il denominatore negativo in $(-1,1)$, il dominio è $(-\infty,-1) \cup [2,+\infty)$

③ Dire $x \mapsto \frac{1}{2}|x| - x$ è invertibile e in caso affermativo determinare l'inversa.
La funzione è uguale a $-\frac{3}{2}x$ per $x \geq 0$, e a $-\frac{1}{2}x$ per $x<0$. Manda i positivi nei negativi e viceversa, 0 in 0. La funzione è invertibile. Dato che per $y \geq 0$ $y = -\frac{1}{2}x$ ha soluzione non positiva $x = -2y$, e per $y<0$ $y = -\frac{3}{2}x$ ha soluzione positiva $x = -\frac{2}{3}y$, si ha che $f^{-1}(y) = -2y$, per $y \geq 0$, $f^{-1}(y) = -\frac{2}{3}y$ per $y<0$.

④ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{x^2}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^{x^2-x}} = 0$ (forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, formula di H.) Nota che $x^2 - x \to +\infty$, per $x \to +\infty$.

⑤ $f(x) = e^{x^2/(x-1)}$. Dominio $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$. Funzione positiva (sempre)
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
La derivata è $f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = e^{x^2/(x-1)} \frac{(x-2)x}{(x-1)^2}$,
il cui segno è determinato dal fattore $(x-2)x$, che è positivo in $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ e negativo in $(0,2)$. Di conseguenza la funzione è crescente in $(-\infty,0)$, 0 è un punto di massimo locale con valore $f(0) = e^{-1}$, poi la funzione decresce in $(0,1)$ e $(1,2)$, 2 è un punto di minimo locale con valore $f(2) = e^4$, infine la funzione cresce in $(2,+\infty)$.



1) Ordinare $3^{40}, 30^{20}, 300^{10}$. Prendendo i logaritmi in base 10 si ha $\log 3^{40} = 40\log 3$, $\log 30^{20} = 20\log 3+20$, $\log 300^{10} = 10\log 3 + 20$, da cui $10\log 3 + 20 < 20\log 3 + 20$ (essendo $0<\log 3<1$) e allora $300^{10} < 30^{20}$ e da $40\log 3 < 20\log 3 + 20$ anche $3^{40} < 30^{20}$. Ma $40\log 3 < 10\log 3 + 20$ $\iff 30\log 3 < 20 \iff \log 3 < 2/3 \iff 10^{2/3} > 3 \iff 100 > 3^3$. Quindi $3^{40} < 300^{10} < 30^{20}$.

2) Dominio di $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}}$. La funzione sotto radice deve essere ben definita ($x \neq \pm 2$) e non negativa. Dato che il denominatore è negativo in $(-2,2)$, e il numeratore è negativo in $(1,2)$ si ha che il dominio è dato da $(-\infty,-2)\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$.

3) Dire se $\frac{1}{2}|x|-x$ è invertibile e in caso affermativo determinare l'inversa. La funzione è uguale a $-\frac{1}{2}x$, per $x \geq 0$, e uguale a $-\frac{3}{2}x$, per $x<0$. Inoltre manda i positivi nei negativi e viceversa, lo 0 in 0. La funzione quindi è invertibile. Risolvendo $y=-\frac{3}{2}x$, per $y\geq 0$ si ottiene la soluzione nonpositiva $x=-\frac{2}{3}y$, mentre risolvendo $y=-\frac{1}{2}x$, per $y<0$ si ottiene la soluzione positiva $x=-2y$, per cui $f^{-1}(y)=-\frac{2}{3}y$ per $y\geq 0$ e $f^{-1}(y)=-2y$, per $y<0$.

4) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\tan x}{x^2-\frac{\pi^2}{4}} = \frac{+\infty}{0+} = +\infty$$

5) $f(x)=e^{(x^2-4)/(1-x)}$. Dominio $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Funzione positiva (no simmetrie). $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.
La derivata è
$$f'(x)=e^{(x^2-4)/(1-x)}\,\frac{2x(1-x)+(x^2-4)}{(1-x)^2} = -e^{(x^2-4)/(1-x)}\,\frac{(x^2-2x+4)}{(1-x)^2}$$
Dato che x^2-2x+4 non ha radici reali, è sempre positiva, quindi la derivata è sempre negativa. La funzione è decrescente in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$. Inoltre $f(0)=e^{-4}$.