# Università di Roma "La Sapienza"
# Corso di Fisica Matematica Superiore

Prova di esame del 26 febbraio 2016

**Esercizio 1.** Per $\lambda \in \mathbb{C}$, si consideri l'equazione

$$(-\Delta - \lambda)\, u = f \qquad\qquad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

(i) Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione ammette una ed una sola soluzione $u \equiv u_f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ per ogni assegnato dato $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(ii) Verificare che per tali valori di $\lambda$ la soluzione dipende con continuità da $f$, nel senso che la mappa $L^2(\mathbb{R}^3) \ni f \mapsto u_f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ è continua.

(iii) Tale mappa è continua da $L^2(\mathbb{R}^3)$ ad $H^2(\mathbb{R}^3)$?

(iv) Considerare ora i casi $d = 1$ e $d = 2$. Il risultato dipende dalla dimensione? Perchè?

**Esercizio 2.** Una particella quantistica è confinata in una regione essenzialmente bidimensionale dello spazio, assimilabile alla superficie sferica $S^2_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = r\}$. Gli stati del sistema sono identificati con i raggi nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S^2_r)$ e la dinamica è determinata dall'equazione di Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S^2_r, \quad t \in \mathbb{R} \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases} \tag{1}$$

dove l'operatore $\Delta$ è l'operatore di Laplace ristretto ad agire su funzioni che sono costanti nella variabile radiale.

**1.** Per $\psi_0$ appartenente ad un opportuno dominio $\mathcal{D}$, denso in $L^2(S^2_r)$, si scriva la soluzione $t \mapsto \psi(t)$ dell'equazione differenziale (**??**), esplicitandola rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

**2.** Mostrare che l'*evoluzione temporale* determinata da (**??**) è ben definita per ogni $\psi_0 \in L^2(S^2_r)$.

**3.** Determinare se esistono *stati stazionari*, ossia se esiste $\psi_0 \in L^2(S^2_r)$ tale che $\psi(t) = \psi_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

**4.** Il sistema è preparato in uno stato in cui una misura dell'energia fornisce con certezza o il valore $6E_*$ oppure il valore $12E_*$, dove $E_* \equiv \hbar^2/2mr^2$; il primo valore appare con frequenza (probabilità) doppia del secondo.
**4.1** Determinare un vettore $\psi_* \in L^2(S^2_r)$ compatibile con la procedura di preparazione descritta.
**4.2** Determinare la dimensione dello spazio lineare (complesso) individuato da tutti i vettori $\psi_*$ compatibili con la procedura di preparazione descritta.