Università di Roma "La Sapienza"
Corso di Fisica Matematica Superiore

Prova di esame del 20 aprile 2016

Esercizio 1. Si indichino con i simboli $\{J_1, J_2, J_3\}$ tre operatori autoaggiunti, densamente definiti in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, che soddisfano le relazioni di commutazione

$$[J_a, J_b] = \mathrm{i} \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc} J_c \qquad \text{(AMCR)}$$

per ogni $a, b \in \{1, 2, 3\}$. Al solito, si intende che le relazioni di commutazione sono verificate su un comune dominio denso di essenziale autoaggiuntezza $\mathcal{D}$, invariante rispetto all'azione degli operatori. I simboli $\{L_1, L_2, L_3\}$ sono invece riservati alle componenti del momento angolare *nella rappresentazione naturale* in $L^2(\mathbb{R}^3)$, definiti sul dominio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, che in particolare soddisfano (AMCR) se si usano unità naturali ($\hbar = 1$).

(i) Sia $\psi_* \in \mathcal{D}$, $\psi_* \neq 0$, tale che $J_a \psi_* = m_a \psi_*$ per ogni $a \in \{1, 2, 3\}$. Dimostrare che $m_a = 0$ per ogni $a \in \{1, 2, 3\}$.

(ii) Nel caso della rappresentazione naturale in $L^2(S^2)$, si determini un vettore ψ_* che soddisfa le proprietà menzionate al punto precedente. Si dimostri che tale vettore è unico a meno di normalizzazione e fase, *i.e.* che esiste un unico *stato* con tali proprietà. Considerando poi la rappresentazione naturale in $L^2(\mathbb{R}^3)$, si determinino *tutti* i vettori ψ_* che soddisfano le proprietà menzionate al punto precedente.

(iii) Si determini uno stato in $L^2(\mathbb{R}^3)$ per cui le componenti del momento angolare L_2 e L_3 possono essere misurate *simultaneamente* con accuratezza arbitraria. Si discuta l'eventuale unicità di tale stato.

Esercizio 2. Si consideri una successione (bilatera) $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tale che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = 1, \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |a_n|^2 < +\infty,$$

e inoltre

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a}_{n+m} = 0 \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,.$$

Dimostrare che il numero reale $\nu := \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |a_n|^2$ (la serie converge in virtù delle ipotesi precedenti) è **intero**, ossia $\nu \in \mathbb{Z}$.

Nota: si può assumere come nota la densità di $C^1(S^1, S^1)$ in $H^{1/2}(S^1, S^1)$. [Brevi cenni sulla dimostrazione di questo fatto verranno valutati positivamente come parte **facoltativa** dell'esercizio.]