Università di Roma "La Sapienza"

Corso di Fisica Matematica Superiore

Prova di esame del 3 febbraio 2015

Esercizio 1. Si consideri una successione (bilatera) $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = 1, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||a_n|^2 < +\infty,$$

e inoltre

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{a}_{n+m} = 0 \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\,.$$

Dimostrare che il numero reale $\nu := \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|a_n|^2$ (la serie converge in virtù delle ipotesi precedenti) è **intero**, ossia $\nu \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Una particella quantistica è confinata in una regione essenzialmente bidimensionale dello spazio, assimilabile alla superficie di un toro. Identificando la regione con l'insieme

$$Q = \mathbb{T}^1_L \times \mathbb{T}^1_M, \qquad \text{dove} \quad \mathbb{T}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z},$$

la dinamica del sistema è governata dall'equazione

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t,\mathbf{x}), & \mathbf{x}=(x,y)\in Q,\ t\in\mathbb{R} \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Per ψ_0 appartenente ad un opportuno dominio $\mathcal{D}$, denso in $L^2(Q)$, [da specificare nello svolgimento] si mostri che esiste un'unica soluzione $t \mapsto \psi(t)$ dell'equazione differenziale (**??**), esplicitandone lo sviluppo rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

2. Mostrare che l'*evoluzione temporale* determinata da (**??**) è ben definita per ogni $\psi_0 \in L^2(Q)$.

3. Determinare se esiste un *vettore di stato stazionario*, ossia se esiste $\psi_{\mathrm{s}} \in L^2(Q)$ tale che la soluzione $\psi(t)$ dell'equazione con dato iniziale ψ_{s} soddisfa $\psi(t) \equiv \psi_{\mathrm{s}}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Nei punti successivi si assuma $M = 3L$ e si ponga $E_* = \frac{h^2}{2mL^2}$.

4. Determinare *tutti* gli stati del sistema per cui una misura dell'energia fornisce con certezza un valore compreso tra $\frac{1}{3}E_*$ e $\frac{4}{3}E_*$.

5. Si scelga ψ_0 nell'insieme determinato al punto (4). Stabilire se la dinamica è periodica e, in caso affermativo, calcolarne il periodo.

6. Tra gli stati determinati al punto (4), si determini *uno* stato ψ_{**} tale che

$$\mathbb{P}\text{rob}\left\{X \in \Omega | \psi_{**}\right\} = \frac{1}{2} \qquad \text{con } \Omega = \left\{(x,y) \in Q : L/2 \leq y \leq L\right\}.$$