Università di Roma "La Sapienza"
Corso di Fisica Matematica Superiore

Esercizi sulla dinamica quantistica // Gennaio 2016

Gli **Esercizi** proposti sono risolubili utilizzando esclusivamente la teoria svolta durante le lezioni del corso. I **Problemi** possono invece richiedere più tempo, qualche astuzia e la consultazione di materiale bibliografico.

1 Dinamica quantistica vincolata

Esercizio 1. Una particella quantistica è confinata in una regione essenzialmente bidimensionale dello spazio, assimilabile alla superficie di un toro. Identificando la regione con l'insieme

$$Q = \mathbb{T}^1_L \times \mathbb{T}^1_M, \qquad \text{dove} \quad \mathbb{T}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z},$$

la dinamica del sistema è governata dall'equazione

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t,\mathbf{x}), & \mathbf{x} = (x,y) \in Q,\ t \in \mathbb{R} \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Per ψ_0 appartenente ad un opportuno dominio $\mathcal{D}$, denso in $L^2(Q)$, [da specificare nello svolgimento] si mostri che esiste un'unica soluzione $t \mapsto \psi(t)$ dell'equazione differenziale (3), esplicitandone lo sviluppo rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

2. Mostrare che l'*evoluzione temporale* determinata da (3) è ben definita per ogni $\psi_0 \in L^2(Q)$.

3. Determinare se esiste un *vettore di stato stazionario*, ossia se esiste $\psi_{\rm s} \in L^2(Q)$ tale che la soluzione $\psi(t)$ dell'equazione con dato iniziale $\psi_{\rm s}$ soddisfa $\psi(t) \equiv \psi_{\rm s}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Nei punti successivi si assuma $M = 2L$ e si ponga $E_* = \frac{\hbar^2}{2mL^2}(2\pi)^2$.

4. Determinare *tutti* gli stati del sistema per cui una misura dell'energia fornisce con certezza un valore compreso tra $\frac{1}{2}E_*$ e $\frac{3}{2}E_*$.

5. Si scelga ψ_0 nell'insieme determinato al punto (4). Stabilire se la dinamica è periodica e, in caso affermativo, calcolarne il periodo.

6. Tra gli stati determinati al punto (4), si determini *uno* stato ψ_{**} tale che

$$\mathbb{P}\text{rob}\left\{X \in \Omega | \psi_{**}\right\} = \frac{1}{2} \qquad \text{con } \Omega = \left\{(x,y) \in Q : L/2 \le y \le L\right\}.$$

Esercizio 2. Una particella quantistica è confinata in una regione essenzialmente bidimensionale dello spazio, assimilabile alla superficie di un cilindro di raggio $R > 0$ e lunghezza $L > 0$. Identificando la regione con l'insieme

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi R \leq x \leq \pi R, -L/2 \leq y \leq L/2\right\}$$

la dinamica del sistema è governata dall'equazione

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t, \mathbf{x}), & \mathbf{x} = (x, y) \in Q,\ t \in \mathbb{R} \\ \psi(t, x + 2\pi R, y) = \psi(t, x, y) & \forall (x, y), t \in \mathbb{R} \\ \psi(t, x, -L/2) = 0 = \psi(t, x, L/2) & \forall x \in (-\pi R, \pi R), t \in \mathbb{R} \\ \psi(0, \cdot) = \psi_0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Per ψ_0 appartenente ad un opportuno dominio $\mathcal{D}$, denso in $L^2(Q)$, si scriva la soluzione $t \mapsto \psi(t)$ dell'equazione differenziale (3), esplicitandola rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

2. Mostrare che l'*evoluzione temporale* determinata da (3) è ben definita per ogni $\psi_0 \in L^2(Q)$.

3. Determinare se esistono *stati stazionari*, ossia se esiste $\psi_0 \in L^2(Q)$ tale che $\psi(t) = \psi_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Nei punti successivi si assuma $R = L$ e si ponga $E_* = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$.

4. Il sistema è preparato in uno stato in cui una misura dell'energia fornisce con certezza o il valore $(1 + \pi^2)E_*$ oppure il valore $9(1 + \pi^2)E_*$; il primo valore appare con frequenza (probabilità) doppia del secondo. Determinare un vettore $\psi_* \in L^2(Q)$ compatibile con la procedura di preparazione descritta.
4b. Facoltativo: spiegare perché il vettore ψ_* non è completamente determinato dalla procedura descritta. Esibire la famiglia di tutti i vettori in $L^2(Q)$ compatibili con tale procedura.

5. Si assuma $\psi_0 = \psi_*$. Determinare se la dinamica è periodica e, in caso affermativo, calcolarne il periodo.

6. Per lo stato ψ_* determinato al punto 4, si calcoli la probabilità che una misura della posizione fornisca un risultato nel semicilindro superiore, ossia si calcoli

$$\mathbb{P}rob\left\{X \in \Omega | \psi_*\right\} \qquad \text{con } \Omega = \left\{(x, y) \in Q : 0 \leq y \leq L/2\right\}.$$

Esercizio 3. Una particella quantistica è confinata in una regione dello spazio essenzialmente bidimensionale, identificabile con la regione $Q = [0, \ell] \times [0, 2\ell] \subset \mathbb{R}^2$ per $\ell > 0$. Assumendo che il confinamento sia perfetto, lo stato del sistema è

descritto da un raggio in $L^2(Q)$ e la dinamica del sistema è governata da

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t,x), & x \in Q,\, t \in \mathbb{R} \\ \psi(t,x) = 0 & x \in \partial Q \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases}$$

1. Per un generico stato iniziale $\psi_0 \in L^2(Q)$ si scriva lo stato al tempo $t \in \mathbb{R}$, esplicitandolo rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

2. Si calcoli la probabilità che una misura dell'energia del sistema al tempo $t \in \mathbb{R}$ fornisca un valore $E < \frac{5}{2}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{\ell^2} =: \frac{5}{2}E_*$.

Sia ora

$$\psi_0(x,y) = \sqrt{\frac{3}{2}}\ell^{-1}\sin(\pi\ell^{-1}x)\sin(\pi\ell^{-1}y) + \sqrt{\frac{1}{2}}\ell^{-1}\sin(\pi\ell^{-1}x)\sin(\pi\ell^{-1}\frac{3}{2}y).$$

3. Si calcoli *numericamente* la probabilità che una misura dell'energia del sistema al tempo $t = 7$ fornisca un valore $E < \frac{5}{2}E_*$.

4. Si calcoli il valore atteso per una misura dell'energia al tempo $t = 7$.

Esercizio 4. Una particella quantistica è confinata in una regione dello spazio essenzialmente bidimensionale, identificabile con la regione $\Omega = [0, L_1]\times[0, L_2] \subset \mathbb{R}^2$. Il sistema è preparato in uno stato descritto da $\psi_0 \in L^2(\Omega)$ e la dinamica del sistema è descritta da

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t,x), & x \in \Omega,\, t \in \mathbb{R} \\ \psi(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases}$$

(i) Si ponga $L_1 = L_2 = L$. Mostrare che la dinamica è periodica e determinarne il periodo.

(ii) Sia ora $L_1 \neq L_2$ e sia ψ_0 tale che una misura dell'energia della particella fornisce *certamente* un valore minore di $E_0 \in \mathbb{R}$. Discutere la periodicità della dinamica in funzione di un opportuno parametro adimensionato

2 Dinamica in potenziale armonico

Esercizio 5. Nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ si consideri l'operatore $H_{\text{osc}} = \frac{\hbar\omega}{2}(D^2 + X^2)$, con $D = -i\frac{d}{dx}$, definito sul dominio invariante $\mathcal{S}(R)$. Sia $t \mapsto \psi(t)$ l'evoluzione temporale di Schrödinger generata da H_{osc}.

(i) Ricordando la teoria svolta a lezione, costruire un sistema ortonormale completo di autofunzioni di H_{osc}.

(ii) Dimostrare che per ogni $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ l'evoluzione temporale è periodica di periodo $T = \frac{4\pi}{\omega}$.

Suggerimento: dimostrare preliminarmente che $\psi(t + \frac{\pi}{\omega}, x) = e^{-i\pi/2}\,\psi(t, -x)$ per ogni $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

3 Dinamica sulla sfera e armoniche sferiche

Esercizio 6. (Teoria del momento angolare) Si consideri una rappresentazione unitaria del gruppo $SO(3)$ in uno spazio di Hilbert spearabile $\mathcal{H}$. Ricordando la teoria svolta a lezione:

(i) si definiscano le componenti del *momento angolare quantistico* associate alla rappresentazione;

(ii) dette (J_1, J_2, J_3) tali componenti, si discuta l'esistenza di autovettori simultanei di J_3 e J^2, determinando opportune condizioni sui valori che possono assumere i relativi autovalori.

Esercizio 7. Una particella quantistica è confinata in una regione essenzialmente bidimensionale dello spazio, assimilabile alla superficie sferica $S_r^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = r\}$. Gli stati del sistema sono identificati con i raggi nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S_r^2)$ e la dinamica è determinata dall'equazione di Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S_r^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases} \tag{3}$$

dove l'operatore Δ è l'operatore di Laplace ristretto ad agire su funzioni che sono costanti nella variabile radiale. [1]

1. Per ψ_0 appartenente ad un opportuno dominio $\mathcal{D}$, denso in $L^2(S_r^2)$, si scriva la soluzione $t \mapsto \psi(t)$ dell'equazione differenziale (3), esplicitandola rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

2. Mostrare che l'*evoluzione temporale* determinata da (3) è ben definita per ogni $\psi_0 \in L^2(S_r^2)$.

[1] Tale operatore coincide con l'operatore di Laplace-Beltrami sulla varietà Riemanniana S_r^2, ma questa reinterpretazione è inessenziale ai fini dell'esercizio.

3. Determinare se esistono *stati stazionari*, ossia se esiste $\psi_0 \in L^2(S_r^2)$ tale che $\psi(t) = \psi_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

5. Il sistema è preparato in uno stato in cui una misura dell'energia fornisce con certezza o il valore $2E_*$ oppure il valore $6E_*$, dove $E_* \equiv \hbar^2/2mr^2$; il primo valore appare con frequenza (probabilità) doppia del secondo. Determinare un vettore $\psi_* \in L^2(S_r^2)$ compatibile con la procedura di preparazione descritta.

5b. Facoltativo: spiegare perchè il vettore ψ_* non è completamente determinato dalla procedura descritta. Esibire la famiglia di tutti i vettori in $L^2(S_r^2)$ compatibili con tale procedura.

Suggerimento: conviene innanzitutto determinare un sistema ortonormale completo di autofunzioni di Δ in $L^2(S_r^2)$. A tal fine, si consiglia di riscrivere Δ in coordinate sferiche $(r, \theta, \phi) \in [0, +\infty) \times (0, \pi) \times \mathbb{T}^1$. L'operatore così ottenuto avrà una struttura familiare: un addendo agisce solo sulla variabile radiale e l'altro addendo è proporzionale ad un operatore noto.