Università di Roma "La Sapienza"
Corso di Fisica Matematica Superiore

Esercizi sulla trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^d$ // Novembre 2015

Gli **Esercizi** proposti sono risolubili utilizzando esclusivamente la teoria svolta durante le lezioni del corso. I **Problemi** possono invece richiedere più tempo, qualche astuzia e la consultazione di materiale bibliografico.

Esercizio 1 (**Convergenza debole e forte di successioni oscillanti**). Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $f \in \mathcal{H}$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$. Diciamo che la successione f_n converge fortemente a f se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Diciamo che la successione f_n converge debolmente a f se per ogni $h \in \mathcal{H}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \langle h, f_n - f\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

In $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ studiare la convergenza debole e forte delle seguenti successioni:

(i) $f_n(x) = g(x)\cos(nx)$ per fissata $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

(ii) $f_n(x) = g(x-n)$ per fissata $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Esercizio 2 (**Trasformata di funzioni Gaussiane; principio di Fourier**). Per $\lambda > 0$ poniamo

$$g_\lambda(x) = C_\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

dove la costante C_λ è fissata imponendo $\|g_\lambda\|_{L^2} = 1$. Per semplicità, poniamo $d = 1$.

(i) Verificare che la varianza della misura di probabilità $d\mu_\lambda(x) := |g_\lambda(x)|^2 dx$ è

$$\mathrm{Var}(\mu_\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} x^2 |g_\lambda(x)|^2 dx = \frac{1}{4\lambda}.$$

Si ponga $\mathrm{Var}(\mu_\lambda) =: \sigma(g_\lambda)^2$.

(ii) Verificare che $\mathcal{F}g_\lambda(\kappa) = g_{1/4\lambda}(\kappa)$.

(iii) Concludere che

$$\sigma(g_\lambda)\,\sigma(\widehat{g}_\lambda) = \frac{1}{2} \qquad \text{per ogni } \lambda > 0.$$

In particolare, osservare che $g_{1/2}(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ è invariante rispetto alla trasformata di Fourier e che

$$\sigma(g_{1/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma(\widehat{g}_{1/2}).$$

Esercizio 3 (**Equazione di Helmotz inomogenea**). Per $\lambda \in \mathbb{C}$, si consideri l'equazione

$$(-\Delta - \lambda)\, u = f \qquad\qquad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

(i) Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione ammette una ed una sola soluzione $u \equiv u_f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ per ogni assegnato dato $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(ii) Verificare che per tali valori di λ la soluzione dipende con continuità da f, nel senso che la mappa $L^2(\mathbb{R}^3) \ni f \mapsto u_f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ è continua.

(iii) Ripetere l'esercizio in $d = 1$ e $d = 2$. Il risultato dipende dalla dimensione? Perchè?

Esercizio 4. (Spettro dell'operatore Laplaciano in $\mathbb{T}^d$ e $\mathbb{R}^d$) Si ricorda che, dato un operatore lineare $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ densamente definito nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, si dice **spettro di T** l'insieme $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ dove

$$\rho(T) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists (T - z\mathbb{1})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\}.$$

Si ricorda inoltre che $\sigma_{\text{pp}}(T)$ indica l'insieme degli autovalori di T, ossia

$$\sigma_{\text{pp}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \psi \in \mathcal{D}(T),\, \psi \neq 0 \,:\, T\psi = \lambda\psi\}.$$

Tenendo presenti le definizioni precedenti:

(i) dimostrare che $\sigma_{\text{pp}}(T) \subset \sigma(T)$ per ogni operatore T;

(ii) calcolare lo spettro dell'operatore $H_0 = -\Delta$ definito sul dominio $\mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$; dimostrare che $\sigma_{\text{pp}}(H_0) = \varnothing$;

(iii) calcolare lo spettro dell'operatore $T_L = -\Delta$ definito sul dominio $H^2(\mathbb{T}^3_L)$ in $L^2(\mathbb{T}^3_L)$, dove $\mathbb{T}^3_L := \mathbb{R}^3/L\mathbb{Z}^3$; osservare che $\sigma(T_L) = \sigma_{\text{pp}}(T_L)$.

(iv) Riflettere sui risultati precedentemente ottenuti.

(v) *Facoltativo:* Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Esibire un operatore lineare T, densamente definito in $\mathcal{H}$, tale che $\sigma_{\text{pp}}(T) \neq \varnothing$ e $\sigma(T) \setminus \sigma_{\text{pp}}(T) \neq \varnothing$. (E' richiesta una traccia della dimostrazione che tali insiemi sono non vuoti).

Esercizio 5. (Equazione di Poisson in $\mathbb{R}^d$) Sia $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Dimostrare che

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\kappa \mapsto \frac{\widehat{\rho}(\kappa)}{|\kappa|^2}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|}\,\rho(x-y)dy.$$

Osservare che l'ipotesi $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ è innecessariamente forte; determinare ipotesi più deboli sotto cui il risultato è ancora valido. Utilizzare il risultato per determinare la soluzione dell'equazione di Poisson $\Delta u = \rho$ per ρ assegnata. Interpretare fisicamente il risultato ottenuto.

Suggerimento: si può procedere in due modi alternativi:

(1) (Per chi ha seguito *Ist. di Analisi Superiore*). Utilizzare la nozione di trasformata di Fourier distribuzionale e mostrare che

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\kappa \mapsto \frac{1}{|\kappa|^2}\right) = \frac{1}{4\pi|\cdot|} \qquad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3).$$

Quindi concludere usando il fatto che $\mathcal{F}$ trasforma il prodotto di convoluzione in prodotto puntuale.

(2) Dimostrare l'identità

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi\lambda|\kappa|^2} \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{C_\alpha}{|\kappa|^\alpha}$$

dove $C_\alpha = \pi^{-\alpha/2}\Gamma(\alpha)$. Utilizzare il caso $\alpha = 2$ e il teorema di Fubini.

Problema 1. Studiare l'antitrasformata di Fourier della funzione

$$\kappa \mapsto \frac{\sin \lambda|\kappa|}{|\kappa|}, \qquad \kappa \in \widehat{\mathbb{R}}^3,$$

utilizzando la nozione di trasformata di Fourier per le distribuzioni temperate. Dedurne la forma esplicita della soluzione dell'equazione delle onde in dimensione $d = 3$.

Riferimento: può essere utile consultare [R. S. Strichartz, *A guide to distribution theory and Fourier transform*, World Scientific, 2003] oppure uno dei classici testi di L. Schwartz sulla trasformata di Fourier distribuzionale.