Università di Roma "La Sapienza"
Corso di Fisica Matematica Superiore

Esercizi sulla serie di Fourier // Ottobre 2015

Gli **Esercizi** proposti sono risolubili utilizzando esclusivamente la teoria svolta durante le lezioni del corso. I **Problemi** possono invece richiedere più tempo, qualche astuzia e la consultazione di materiale bibliografico.

1 Serie di Fourier uni-dimensionale

1.1 Problemi in $\mathbb{T}^1$

Esercizio 1 (Equazione del calore su $\mathbb{T}^1$). Posto $\mathbb{T}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, per $L > 0$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, & x \in \mathbb{T}^1_L,\ t > 0; \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0 \in L^2(\mathbb{T}^1_L). \end{cases}$$

(i) Si determini la soluzione $u(t,x)$ esprimendola come serie di Fourier.

(ii) Si dimostri che, per ogni $t > 0$, $u(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{T}^1_L)$.

(iii) Si mostri che la funzione $t \mapsto u(t,\cdot)$ è *continua* da $[0,+\infty)$ a $L^2(\mathbb{T}^1_L)$.

(iv) Si mostri che la funzione $t \mapsto u(t,\cdot)$ è C^1*-regolare* [(1)] da $(0,+\infty)$ a $L^2(\mathbb{T}^1_L)$. Contestualmente, si verifichi che la derivata rispetto a t soddisfa $\partial_t u(t,\cdot) = \partial_x^2 u(t,\cdot)$ in L^2 (e quindi puntalmente, in virtù di (ii)) per ogni $t > 0$.

(v) Quale condizione di regolarità per u_0 è sufficiente a garantire che la mappa precedente è C^1-regolare da $[0,+\infty)$ a $L^2(\mathbb{T}^1_L)$?

(vi) Si mostri che la funzione $t \mapsto u(t,\cdot)$ è *continua* da $(0,+\infty)$ a $C(\mathbb{T}^1_L)$.

(vii) Quale condizione di regolarità per u_0 è sufficiente a garantire che la mappa precedente è C^1-regolare da $[0,+\infty)$ a $C(\mathbb{T}^1_L)$?

(viii) Si studi il limite asintotico $\lim_{t\to\infty} u(t,x) =: u_\infty(x)$. In particolare, si determini la funzione u_∞ e si mostri che il limite è raggiunto nella topologia uniforme, ossia che

$$\|u(t,\cdot) - u_\infty\|_\infty \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si interpreti fisicamente il risultato.

---

(1) Una funzione $t \mapsto f(t)$ da $I \subset \mathbb{R}$ ad uno spazio di Banach $\mathcal{E}$ è detta C^1-regolare se esiste una mappa continua $I \ni t \mapsto g(t) \in \mathcal{E}$ tale che

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h}\left(f(t+h) - f(t)\right) - g(t) \right\|_{\mathcal{E}} = 0, \qquad \text{per ogni } t \in I.$$

Esercizio 2 (**Equazione del calore *backward-in-time***). Si fissi $T > 0$. Sia u soluzione del problema ai valori **finali**:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, & t \in [0,T), \qquad x \in \mathbb{T}^1_L, \\ u(T,x) = g(x), & \text{dato finale} \end{cases}$$

per $g \in C(\mathbb{T}^1_L)$ assegnata, dove $\mathbb{T}^1_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$.

(i) Si determini una condizione di regolarità su g *sufficiente* a garantire l'esistenza di una soluzione $u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{T}^1_L)$ per $t \in [0,T]$.

(ii) Si mostri che la soluzione non dipende con continuità dal dato g, nè rispetto alla topologia della convergenza uniforme in $[0,L]$, nè rispetto alla topologia di $L^2(\mathbb{T}^1_L)$.

Suggerimento: nei prossimi giorni apparirà un suggerimento relativo al punto (ii), per ora provateci da soli. $\diamondsuit$

Esercizio 3 (**Equazione di Schrödinger su $\mathbb{T}^1$**). Si consideri il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger libera su $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} i\,\partial_t u(t,x) = -\partial_x^2 u(t,x), & x \in \mathbb{T}^1,\ t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0 \in H^2(\mathbb{T}^1_L). \end{cases} \tag{1}$$

(i) Si determini la soluzione $u(t,x)$ esprimendola come serie di Fourier.

(ii) Si dimostri che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $u(t,\cdot) \in H^2(\mathbb{T}^1_L)$.

(iii) Si dimostri che la mappa $t \mapsto u(t,\cdot)$ è C^1-*regolare* da $\mathbb{R}$ a $L^2(\mathbb{T}^1_L)$. Contestualmente, si mostri che la derivata rispetto a t soddisfa l'equazione (**??**) in L^2. (Come interpreto il simbolo ∂_x in questo contesto?)

(iv) Si mostri che $\|u(t,\cdot)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(v) Utilizzando il punto precedente, si mostri che, sebbene l'*equazione* (**??**) abbia soluzione in L^2 solo per dati iniziali in H^2, l'*evoluzione temporale* determinata da (**??**) estende per continuità a tutti i dati iniziali $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^1_L)$.

(vi) Stati stazionari: esiste un dato iniziale u_0 tale che la soluzione è $u(t,\cdot) = u_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$?

(vii) Periodicità: si dimostri che esiste $T \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(t+T) = u(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Avrei ottenuto lo stesso risultato se avessi imposto, per $x \in [0,L]$, condizioni al bordo di Dirichelet o di Neumann?

Esercizio 4 (**Equazione del calore con forzante**). In $[0, L] \subset \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = f(x), & x \in [0,L],\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) \end{cases}$$

per $u_0 \in L^2([0,L])$ ed una assegnata funzione $f \in C([0,L])$ (detta *forzante*). Si determini $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$. Si interpreti il risultato, giustificando dal punto di vista fisico l'esistenza di due comportamenti qualitativamente diversi.

Esercizio 5 (**Sulle successioni di numeri complessi**). Si consideri una successione (bilatera) $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = 1, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||a_n|^2 < +\infty,$$

e inoltre

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{a}_{n+m} = 0 \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,.$$

Dimostrare che il numero reale $\nu := \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|a_n|^2$ (la serie converge in virtù delle ipotesi precedenti) è **intero**, ossia $\nu \in \mathbb{Z}$.

Suggerimento: nei prossimi giorni apparirà un suggerimento.
Nota: Questo esercizio è stato ispirato da un seminario di H. Brezis.

Problema 1 (**Teorema pseudo-ergodico**). Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$ con periodo $L = 1$. Dimostrare che

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) = \int_0^1 f(x)dx$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Suggerimento: cominciate a dimostrare la tesi per $f(x) = \mathrm{e}^{i2\pi mx}$, con $m \in \mathbb{Z}$. Poi osservate che l'ultima relazione è lineare in f.

1.2 Dipendenza dalle condizioni al bordo

Esercizio 6 (**Equazione del calore, dipendenza dalle condizioni al bordo**). In $[0, L] \subset \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, & x \in [0,L],\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in [0,L] \\ \text{condizioni al bordo} \end{cases}$$

con $u_0 \in L^2([0,L])$ e le seguenti condizioni al bordo:

(P) periodicità: $u(t,0) = u(t,L)$

(D) Dirichelet: $u(t,0) = 0 = u(t,L)$

(N) Neumann: $(\partial_x u)(t,0) = 0 = (\partial_x u)(t,L)$.

(i) In ognuno dei tre casi, si determini un'*Ansatz* per la soluzione, esprimendola come serie rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

(ii) In ognuno dei tre casi, si studi il limite asintotico $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$. In particolare, si studi l'esistenza del limite nella topologia della convergenza uniforme. Si interpreti dal punto di vista fisico il diverso comportamento asintotico delle soluzioni, al variare delle condizioni al bordo.

(iii) In ognuno dei tre casi, si determinino gli eventuali stati stazionari.

2 Serie di Fourier multidimensionale

Esercizio 7 (**Energia per l'equazione delle onde bidimensionale**). In $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ si consideri l'equazione delle onde

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi(t,x) - \Delta\phi(t,x) = 0, & x \in \mathbb{T}^2,\ t \in \mathbb{R} \\ \phi(0,x) = \phi_0(x), & x \in \mathbb{T}^2 \\ \partial_t\phi(0,x) = \nu_0(x), & x \in \mathbb{T}^2 \end{cases}$$

per $\phi_0 \in H^m(\mathbb{T}^2), \nu_0 \in H^k(\mathbb{T}^2)$.

(i) Determinare preliminarmente $m, k \in \mathbb{N}$ tali che esista una soluzione in $L^2(\mathbb{T}^2)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. (Con il temine *soluzione* intendiamo qui una mappa C^2-regolare da $I \subset \mathbb{R}$ a $L^2(\mathbb{T}^2)$ la cui derivata seconda sia uguale a $c^2\Delta\phi(t,\cdot)$, dove Δ è inteso in senso distribuzionale).

(ii) Calcolare, in funzione dei coefficienti di Fourier dei dati,

$$\mathcal{E}\big(\phi(t), \dot\phi(t)\big) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} (\partial_t\phi(t,x))^2 + c^2|\nabla_x\phi(t,x)|^2 dx.$$

Concludere che $\mathcal{E}\big(\phi(t), \dot\phi(t)\big) = \mathcal{E}\left(\phi_0, \nu_0\right)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8 (**Equazione del calore sul quadrato**). In $Q = [0,L] \times [0,L] \subset \mathbb{R}^2$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \sum_{1\le j\le 2} \partial_{x_j}^2 u(t,x) = 0, & x \in Q,\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0 \in L^2(Q) \\ \text{condizioni al bordo} \end{cases}$$

con le seguenti condizioni al bordo:

(D) Dirichelet: $u(t,x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$,

(C$_1$) condizioni miste (*cilindriche Neumann*):

$$\begin{aligned} (\partial_x u)(t,0,y) = 0 = (\partial_x u)(t,L,y) \qquad & \forall y \in [0,L], \\ u(t,x,y+L) = u(t,x,y) \qquad & \forall x,y \in [0,L]. \end{aligned}$$

($\mathbf{C}_2$) condizioni miste (*cilindriche Dirichlet*):

$$\begin{aligned} u(t,0,y) &= 0 = u(t,L,y) \qquad && \forall y \in [0,L], \\ u(t,x,y+L) &= u(t,x,y) \qquad && \forall x,y \in [0,L]. \end{aligned}$$

(i) In ognuno dei tre casi, si determini un'*Ansatz* per la soluzione, esprimendola come serie rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

(ii) In ognuno dei tre casi, si studi il limite asintotico $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$. In particolare, si studi l'esistenza del limite nella topologia della convergenza uniforme. Si interpreti dal punto di vista fisico il diverso comportamento asintotico delle soluzioni, al variare delle condizioni al bordo.

Esercizio 9 (Equazione di Helmotz inomogenea). Per $\lambda \in \mathbb{C}$, si consideri l'equazione

$$(-\Delta - \lambda)u = f \qquad\qquad \text{per } f \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

(i) Si determini per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ esiste un'unica soluzione $u \equiv u_f$ in $H^2(\mathbb{T}^d) = \mathcal{D}(\Delta)$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$.

(ii) Si mostri che, per tali valori di λ, la mappa $f \mapsto u_f$ è un'applicazione lineare continua da $L^2(\mathbb{T}^d)$ ad $L^2(\mathbb{T}^d)$.

(iii) Tale applicazione è continua anche da $L^2(\mathbb{T}^d)$ ad $H^2(\mathbb{T}^d)$?

(iv) *Facoltativo:* per tali valori di λ, si ponga $R(\lambda) := (-\Delta - \lambda 1)^{-1} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}^d))$. Si mostri che la mappa $\lambda \mapsto R(\lambda)$ è una funzione meromorfa da $\mathbb{C}$ in $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}^d))$ (documentarsi sulla definizione di tali funzioni è parte integrante dell'esercizio).

Esercizio 10. Una particella quantistica è confinata in una regione dello spazio essenzialmente bidimensionale, identificabile con la regione $Q = [0,L_1]\times[0,L_2] \subset \mathbb{R}^2$. Il sistema è preparato in uno stato descritto da $\psi_0 \in L^2(Q)$ e la dinamica del sistema è descritta, per dati iniziali sufficientemente regolari, da

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t,x), & x \in Q,\ t \in \mathbb{R} \\ \psi(t,x) = 0 & x \in \partial Q \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0 & \psi_0 \in C_0^\infty(Q) \end{cases}$$

(i) Si determini la soluzione $\psi(t,x)$ esprimendola come serie rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

(ii) Utilizzando il punto precedente, si mostri che, sebbene l'*equazione* abbia soluzione in L^2 solo per dati iniziali sufficientemente regolari, l'*evoluzione temporale* determinata dall'equazione estende per continuità a tutti i dati iniziali $\psi_0 \in L^2(Q)$. In altri termini, si mostri che la mappa

$$U(t) : C_0^\infty(Q) \ni \psi_0 \mapsto \psi(t,\cdot) \in L^2(Q)$$

estende *per continuità* ad una mappa definita su tutto $L^2(Q)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Si ponga $L_1 = L_2 = L$. Mostrare che la dinamica è periodica e determinarne il periodo.

(iv) Sia ora $L_1 \neq L_2$. Discutere la periodicità delle soluzioni in funzione del parametro adimensionato $\ell = L_1/L_2$.