ISTITUZIONI MATEMATICA II - CANALE A-L - 18/1/2017

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 6) - Si consideri il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} 2y - 3x - 1 = 0 \\ x + y = z \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

i) stabilire se ammette soluzioni e quante ne ammette (motivando la risposta)

ii) trovare tutte le soluzioni (utilizzando la teoria delle matrici).

Soluzione : i) Avendo il sistema lo stesso numero di equazioni e incognite e essendo il rango della matrice dei coefficienti massimo, per il teorema di Cramer il sistema ammette un'unica soluzione.
ii) La soluzione é : (- 2/3 , - 1/2 , - 7/6)

Esercizio 2. (Punti 6) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y,z) = \left(2xz \quad , \quad yz \quad , \quad x^2 + \frac{y^2}{2} \right)$$

i) determinare l'insieme di definizione di F, l'insieme in cui F é irrotazionale e quello in cui F é conservativo

ii) disegnare la seguente curva e calcolare $\int_\gamma F$, dove γ é la curva in $\mathbb{R}^3$ definita da :

$$\gamma(t) = (0 \quad , \quad \sqrt{3}\cos t \quad , \quad \sqrt{3}\sin t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione : i) L'insieme di definizione é tutto $\mathbb{R}^3$. Il campo é in esso irrotazionale e quindi conservativo perché l'insieme di definizione é stellato.
ii) L'integrale vale 0 perché la curva é una circonferenza e quindi chiusa e il campo é conservativo.

Esercizio 3. (Punti 6)

i) Calcolare :

$$\int\int_D \frac{x}{2x^2+2y^2}\,dx\,dy$$

dove D é il dominio del primo quadrante compreso fra le circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2 , situato nel primo quadrante.

ii) Calcolare l'area del dominio D del punto i).

Soluzione : i) Effettuando il cambio di variabili in coordinate polari si ha : $\int\int_D \frac{x}{2x^2+2y^2}\,dx\,dy \;=\; \int_1^2 [\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\vartheta\rho^2}{2\rho^2}\,d\vartheta]\,d\rho \;=\frac{1}{2}$
ii) L'area si calcola analogamente oppure semplicemente come differenza delle aree di due settori circolari e il suo valore é $\frac{3\pi}{4}$.

Esercizio 4. (Punti 2 o punti -1) - Siano A e B le matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il prodotto AB è :

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) non si può fare.

Risposta : $\boxed{\mathbf{D}}$

Esercizio 5. (Punti 3 o punti -1) - Data la seguente funzione di due variabili :

$$f(x, y) = x\ y\ \ (x + 1)$$

I suoi punti critici sono :

(A) $(0, 0)$ (B) $(0, 0)$ e $(-2, -1)$

(C) non ha punti critici (D) $(0, 0)$ e $(-1, 0)$.

Risposta : $\boxed{\mathbf{D}}$

Esercizio 6. (Punti 2 o -1) - Sia $f(x,y) = \sin y + e^{-x+1}$. La derivata direzionale di f nel punto $(0,0)$ e nella direzione del versore $(0,1)$ é :

(A) 1 ; (B) $(1,1)$; (C) 2 ; (D) $e+1$.

Risposta : $\boxed{\textbf{A}}$

Esercizio 7. (Punti 3 o punti -1) - Sia γ la curva in $\mathbb{R}^3$ definita da :

$$\gamma(t) = (t^2 \ , \ t \ , \ t) \ , \ t \in [0,1].$$

L'integrale curvilineo di prima specie : $\int_\gamma \sqrt{2+z^2} \ ds$ é :

(A) $-\frac{10}{3}$; (B) $\frac{10}{3}$; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $\sqrt{2}$

Risposta : $\boxed{\textbf{B}}$

Esercizio 8. (Punti 3 o -1) - Sia D il dominio del piano limitato dalla curva di equazione $y = 2^x$, $x \in [0,1]$ e dalle rette di equazione $y = 0$, $x = 1$ e $x = 0$. Per ogni funzione continua f vale la formula :

(A) $\int\int_D f(x,y) \; dx\,dy = \int_0^1 [\int_{2^x}^2 f(x,y)dx]dy$

(B) $\int\int_D f(x,y) \; dx\,dy = \int_0^1 [\int_0^{2^x} f(x,y)dy]dx$

(C) $\int\int_D f(x,y) \; dx\,dy = \int_0^1 [\int_0^{2^x} f(x,y)dx]dy$

(D) $\int\int_D f(x,y) \; dx\,dy = \int_0^1 [\int_0^2 f(x,y)dy]dx$

Risposta : $\boxed{\textbf{B}}$

Esercizio 9. (Punti 2 o -1) - Sia F il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ definito da :

$$F(x,y,z) = \big(\sin z + y \quad , \quad x - y \quad , \quad \log(z^2 + y^2 + 1)\big)$$

la divergenza di F é :

(A) $\frac{2z}{z^2+y^2+1} - 1$; (B) $\frac{1}{z^2+y^2+1} - 1$

(C) $(0 \; , \; -1 \; , \; \frac{2z}{z^2+y^2+1})$; (D) $\cos z + 1$

Risposta : $\boxed{\textbf{A}}$