ISTITUZIONI MATEMATICA II - CANALE A-L - 20/9/2016

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 6) - Si consideri il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + 2 & = 0 \\ x_2 + 2x_4 + x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

i) stabilire se ammette soluzioni e quante ne ammette (motivando la risposta)

ii) trovare tutte le soluzioni (utilizzando la teoria delle matrici).

SOLUZIONE :

i) Poiché la matrice dei coefficienti e quella completa hanno lo stesso rango il sistema é compatibile per il Teorema di Rouché Capelli. Ammette infinite soluzioni perché il numero delle incognite é maggiore di quello delle equazioni.

ii) Le soluzioni sono : $(x_1, \frac{2x_1+3}{2}, \frac{-2x_1-3}{2}, \frac{1}{2})$ al variare di x_1 in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. (Punti 6) - Per la seguente funzione di due variabili :

$$f(x, y) = 2ye^{x-y} - 3x$$

i) trovare i punti critici in tutto l'insieme di definizione

ii) stabilire se i punti critici sono estremi relativi o punti di sella

SOLUZIONE :

i) La funzione ha un unico punto critico : $P = (1 + \log(\frac{3}{2}), 1)$

ii) Poiché il determinante della matrice hessiana nel punto P é negativo il punto P é un un punto di sella.

Esercizio 3. (Punti 6) -

i) Calcolare :

$$\int\int_D y \quad dx\, dy$$

dove D é il dominio espresso in coordinate polari dalla limitazione :

$$0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \qquad , \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

ii) Calcolare l'area del dominio D del punto i).

SOLUZIONE :

i) $\int\int_D y \quad dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \rho \sin\theta \quad \rho \quad d\rho \quad d\theta = \frac{2}{3}$

ii)Utilizzando di nuovo il cambio di variabili in coordinate polari si ha che l'area del dominio D é $\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 4. (Punti 2 o punti -1) - Sia A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e $v = (1, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$.

Il punto Av é :

(A) $(6+\sqrt{3}\ ,\ 9\ ,\ -3\sqrt{3})$; (B) $(8\ ,\ 8\ ,\ 1-3\sqrt{3})$

(C) $17-3\sqrt{3}$; (D) $(8\ ,\ 8\ ,\ -9)$

Risposta : $\boxed{\textbf{B}}$

Esercizio 5. (Punti 3 o -1) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{x+1} \sin(x+y) + \log(x+1)\cos(x+y) \quad , \quad \log(x+1)\cos(x+y) \right)$$

e D il suo insieme di definizione. Allora vale la seguente affermazione :

(A) F é irrotazionale ma non conservativo in D

(B) F é irrotazionale e conservativo in D

(C) F non é irrotazionale in D

(D) F é conservativo ma non irrotazionale in D

Risposta : $\boxed{\textbf{B}}$

Esercizio 6. (Punti 2 o -1) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y) = (e^x \sin y \quad , \quad e^x \cos y)$$

e D il suo insieme di definizione. Un potenziale per F in D é :

(A) $U(x,y) = \ e^x \sin y + e^x \cos y$

(B) $U(x,y) = \ e^x + \sin y$

(C) $U(x,y) = \ e^x \sin y + 5$

(D) $U(x,y) = \ -e^x \cos y + 2$

Risposta : $\boxed{\text{C}}$

Esercizio 7. (Punti 3 o punti -1) - Sia γ la curva piana che rappresenta il segmento che congiunge i punti $P = (0,0)$ e $Q = (1,1)$. L'integrale curvilineo di prima specie : $\int_\gamma (x + y^3) \ \ ds$ é :

(A) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$; (B) $3\sqrt{2}$

(C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; (D) $\frac{3}{4\sqrt{2}}$

Risposta : $\boxed{\text{C}}$

Esercizio 8. (Punti 2 o -1) - L'insieme di definizione D della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(y+2)}{x^2-1}$$

é :

(A) $D = \{(x,y) : (y+2) \in [0, 2\pi] \text{ e } x \neq \pm 1\}$

(B) $D = \{(x,y) : x \neq \pm 1\}$

(C) $D = \{(x,y) : y > -2 \text{ e } x^2 > 1\}$

(D) $D = \{(x,y) : x > 1 \text{ e } x < -1\}$

Risposta : **B**

Esercizio 9. (Punti 2 o -1) - Sia D un dominio regolare del piano. L'integrale doppio :

$$\int\int_D (5x - 6y) \ dx\, dy$$

utilizzando le formule di Gauss-Green diventa :

(A) $\int_{+\partial D} 5 \ dy$

(B) $\int_{+\partial D} (5xy - 3y^2) \ dx$

(C) $-\int_{+\partial D} (5\frac{x^2}{2} - 3y^2) \ dxdy$

(D) $\int_{+\partial D} (5\frac{x^2}{2} - 6xy) \ dy$

Risposta : **D**