ISTITUZIONI MATEMATICA II - CANALE A-L - 6/9/2016

Nome e matricola :

Esercizio 1. (Punti 6) - Si consideri il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} x+y+z+1 &= 0 \\ z-3x &= 5 \\ y+2 &= -z \end{cases}$$

i) stabilire se ammette soluzioni e quante ne ammette (motivando la risposta)

ii) trovare tutte le soluzioni (utilizzando la teoria delle matrici).

Soluzione : i) Avendo il sistema lo stesso numero di equazioni e incognite e essendo il rango della matrice dei coefficienti massimo, per il teorema di Cramer il sistema ammette un'unica soluzione.
ii) La soluzione é : (1 , -10 , 8)

Esercizio 2. (Punti 6) - Sia F il campo vettoriale definito da :

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2y+1}{x-5} \quad , \quad 2x-1 \quad , 2z \right)$$

i) determinare l'insieme di definizione di F, l'insieme in cui F é irrotazionale e quello in cui F é conservativo

ii) calcolare $\int_\gamma F$, dove γ é la curva in $\mathbb{R}^3$ definita da :

$$\gamma(t) = (2\cos t \quad , \quad 2\sin t \quad , \quad 0) \quad , \quad t \ \in [0, 2\pi].$$

Soluzione : i) L'insieme di definizione é $D = \{(x,y,z) : x \neq 5\}$. Il campo non é irrotazionale e quindi neppure conservativo.
ii) Il calcolo dell'integrale é piuttosto complicato , ho tenuto conto solo dell'esattezza della formula per calcolarlo.

Esercizio 3. (Punti 6)

i) Calcolare :

$$\int\int_D \frac{1}{x+1}\,dx\,dy$$

dove D é il dominio del primo quadrante delimitato dalla parabola di equazione $y - x^2 = 0$, dall'asse delle x e dalla retta di equazione $x = 1$

ii) Calcolare l'area del dominio D del punto i).

Soluzione : i) $\int\int_D \frac{1}{x+1}\,dx\,dy \;=\; \int_0^1 [\int_0^{x^2} \frac{1}{x+1}\,dy]dx \;=\; -\frac{1}{2} + \log 2$
ii) L'area si calcola analogamente e il suo valore é $\frac{1}{3}$.

Esercizio 4. (Punti 2 o punti -1) - Siano A e B le matrici :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il prodotto AB è :

(A) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ (D) non si può fare.

Risposta : **B**

Esercizio 5. (Punti 3 o punti -1) - Data la seguente funzione di due variabili :

$$f(x, y) = e^x(2x^2 - x + y^2,$$

I suoi punti critici sono :

(A) $(0, 0)$ (B) $(0, 0)$ e $(-2, -1)$

(C) non ha punti critici (D) $(0, 0)$ e $(-2, 2)$.

Risposta : **B**

Esercizio 6. (Punti 2 o -1) - Sia $f(x,y) = \sin y + e^{-x+1}$. La derivata direzionale di f nel punto $(0,0)$ e nella direzione del versore $(0,1)$ é :

(A) $e+1$; (B) $(1,1)$; (C) 2 ; (D) 1.

Risposta : $\boxed{\textbf{D}}$

Esercizio 7. (Punti 3 o punti -1) - Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ definita, in coordinate polari, dalla funzione $\rho(\theta) = e^{3\theta}$, la sua lunghezza é :

(A) $\sqrt{10}\,(\frac{e^{3\pi}}{3} - \frac{1}{3})$; (B) $\sqrt{10}\,(e^{\pi} - 1)$

(C) $\sqrt{10}\,(\frac{1}{3} - \frac{e^{\pi}}{3})$; (D) $\sqrt{10}\,(e^{3\pi} - 1)$

Risposta : $\boxed{\textbf{A}}$

Esercizio 8. (Punti 2 o -1) - Sia D la corona circolare di centro l'origine e raggi 2 e 3 . L'integrale doppio :

$$\int\int_D \frac{x}{x^2+y^2} \quad dx\, dy$$

dopo il cambio di variabili in coordinate polari diventa :

(A) $\int_0^{2\pi}[\int_2^3 \cos\theta \ d\theta]d\rho$

(B) $\int_0^{2\pi}[\int_2^3 \rho \ \cos\theta \ d\theta]d\rho$

(C) $\int_0^{2\pi}[\int_2^3 \cos\theta \ d\rho]d\theta$

(D) $\int_0^{2\pi}[\int_2^3 \frac{\cos\theta}{\rho} \ d\rho]d\theta$

Risposta : $\boxed{\textbf{C}}$

Esercizio 9. (Punti 2 o -1) - Sia F il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ definito da :

$$F(x,y,z) = \big(\sin z + y \quad , \quad x - y \quad , \quad \log(z^2+y^2+1)\big)$$

la divergenza di F é :

(A) $\frac{2z}{z^2+y^2+1} - 1$; (B) $\frac{1}{z^2+y^2+1} - 1$

(C) $(0 \ , \ -1 \ , \ \frac{2z}{z^2+y^2+1})$; (D) $\cos z + 1$

Risposta : $\boxed{\textbf{A}}$