

compito analisi matematica II del 17/2/16

1. (6 pt) Sia

$$f(x, y) = e^{3x+y} + \sin(x - y).$$

Facendo uso del Teorema di Dini si provi che esiste un intorno I di 0 in \mathbb{R} tale che

$$y \in I \text{ e } f(x, y) = 1 \Rightarrow x \leq 0.$$

2. (8 pt) Sia

$$f(x, y) = x^2 - x y^2$$

e

$$K = \overline{B((0, 0), 1)} \cap ([-1/2, 1/2] \times [-2, 2]).$$

- i. si determinino estremo superiore ed inferiore di f in \mathbb{R}^2 ;
- ii. si determinino i punti critici di f e la loro natura;
- iii. si trovino massimo e minimo, punti di massimo e minimo di f in K .

3. (6 pt) Dato il dominio D delimitato dalla parabola di equazione $y = 2x - x^2$, la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$ e l'asse delle x , si calcoli

$$\int \int_D e^x dx dy.$$

4. (6 pt) Data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = -\frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} dx + \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} dy$$

si calcoli al variare di $R > 0$, $R \neq 1$

$$\int_{\gamma_R} \omega$$

dove γ_R è la circonferenza di centro l'origine e raggio R percorsa in senso antiorario.

5. (6 pt) Sia

$$f_n(x, y, z) = \frac{2n+5}{n} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{8}}}{\log(1 + x^2 + y^2 + z^2)}$$

e B la palla unitaria centrata in $(0, 0, 0)$, si provi che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B f_n(x, y, z) dx dy dz \text{ esiste ed è finito.}$$