Compito di Analisi Matematica II del 27/1/16
F.Pacella - A.Siconolfi
Svolgere non piú di cinque esercizi

1. (6 pt) Si dica se la funzione

$$f(x,y) = e^{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

è differenziabile in $(0,0)$.

2. (6 pt) Data l'equazione

$$x^2 - 2\,x\,y + y^2 + x + y - 2 = 0$$

i. si disegni approssimativamente il grafico delle funzioni $y = f(x)$ definite implicitamente dall'equazione in un intorno dei punti di ascissa $x = 1$;

ii. si dimostri che l'insieme delle soluzioni non ha punti singolari.

3. (6 pt) Si determinino estremo superiore ed inferiore, ed eventuali punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = (x+y)\,\log x$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 2,\ -4 \leq y \leq x - 1\}.$$

4. (6 pt) Dato l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1 - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}{\left(1 - (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha}}\, dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ |y| \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

i. lo si calcoli per $\alpha = \frac{1}{2}$;

ii. si dica per quali valori del parametro α la funzione integranda è sommabile in D.

5. (6 pt) Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{\infty} f_n(x)\,dx$$

con

$$f_n(x) = e^{\frac{3\,n\,log x+1}{1-2\,n}}.$$

6. (6 pt) Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = 2\,x\,\varphi(y)\,dx + x^2\,\varphi(y)\,dy$$

si determini $\varphi(y)$ in modo che $\varphi(0) = 1$ e ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$. In corrispondenza di tale φ si calcoli l'integrale di ω sulla curva γ di equazione polare

$$\rho(\theta) = \theta^2 \qquad \theta \in [0,\pi].$$