esonero analisi matematica II del 18/1/16

1. (10 pt) Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{1}{(y-x^2)^2}\,[2\,x\,dx - dy]$$

e la curva

$$\gamma(t) = (\cos^4 t, 2 + \sin^2 t) \qquad t \in [0,\pi]$$

si calcoli

$$\int_\gamma \omega.$$

2. (7 pt) Si dica per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z^\alpha}$$

è sommabile nell'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 1,\ x^2 + y^2 < z^6\}$$

e si calcoli per tali valori

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz.$$

3. (7 pt) Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x\,(\log y)^2, 0)$$

si calcoli tramite un integrale doppio

$$\int_{\partial D^+} F = \int_{\partial D^+} x\ (\log y)^2\,dx$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \leq 5,\ y \geq e^x\}.$$

4. (8 pt)

i. Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx;$$

ii. si verifichi che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

converge q.o. ad una funzione g misurabile in $\mathbb{R}$;

iii. si mostri che g non è sommabile in $\mathbb{R}$.