**Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 4 – 29 ottobre 2015**
**Alcune soluzioni**

**1)** Calcolare $\int_\gamma f$ nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$, $\quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

(c) $f(x,y) = xy$, il sostegno di $\gamma$ è la parte di ellisse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$ contenuta nel primo quadrante.

(a) $|\gamma'(t)| = |(-\sin(t), \cos(t))| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$, quindi

$$\int_\gamma f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt \overset{s=\cos(t)}{=} \int_0^1 \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(s)|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Una parametrizzazione della curva $\gamma$ è la seguente: $\gamma(t) = (3\cos(t), 2\sin(t))$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Quindi $|\gamma'(t)| = |(-3\sin(t), 2\cos(t)| = \sqrt{9\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{4 + 5\sin^2(t)}$ e

$$\int_\gamma f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\cos(t)\sin(t)\sqrt{4+5\sin^2(t)}dt \overset{s=4+5\sin^2(t)}{=} \frac{3}{5}\int_4^9 \sqrt{s}\, ds = \frac{2}{5} s^{\frac{3}{2}}|_4^9 = \frac{38}{5}.$$

**2)** Disegnare il grafico delle seguenti curve, stabilendo se si tratta di curve regolari, semplici o rettificabili:

$$\gamma_2 : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (\sin^2(t), \cos^2(t)).$$

Infine calcolare la lunghezza di $\gamma_2$.

$\gamma_2'(t) = (2\cos(t)\sin(t), -2\cos(t)\sin(t))$ che non si annulla mai per $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, quindi $\gamma_2$ è una curva regolare. Inoltre si tratta di una curva semplice, essendo per $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ la funzione $t \mapsto \sin^2(t)$ iniettiva.
Per disegnare il grafico basta porre $x = \sin^2(t)$ e $y = \cos^2(t)$, quindi, dato che $x + y = 1$ e $0 < x, y < 1$, si tratta del segmento aperto che va da $(0,1)$ a $(1,0)$ (percorso dal primo verso il secondo). In particolare $\gamma_2$ è rettificalbile.
Da quanto detto è chiaro (per il Teorema di Pitagora!) che $L(\gamma_2) = \sqrt{2}$, per esercizio verifichiamolo con l'integrale curvilineo:

$$L(\gamma_2) = \int_{\gamma_2} 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\gamma_2'(t)|dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)dt = \sqrt{2}\sin^2(t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}.$$

**3)** Considerare la curva $\gamma : [0,5] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}e^t, e^t\cos(t), e^t\sin(t)),$$

determinare l'ascissa curvilinea calcolata a partire dal punto corrispondente al valore $t = 0$ e riscrivere l'equazione della curva rispetto all'ascissa curvilinea. Calcolare la lunghezza di $\gamma$.

Essendo $|\gamma'(t)| = |(\sqrt{2}e^t, e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\cos(t) + \sin(t))| = 2e^t$,

$$s(t) = \int_0^t 2e^\tau d\tau = 2(e^t - 1).$$

Quindi invertendo $s = 2(e^t - 1)$ otteniamo $t = \log(\frac{s}{2} + 1)$, da cui

$$\gamma(s) = (\sqrt{2}(\frac{s}{2} + 1), (\frac{s}{2} + 1)\cos(\log(\frac{s}{2} + 1)), (\frac{s}{2} + 1)\sin(\log(\frac{s}{2} + 1))),$$

e

$$L(\gamma) = s(5) = 2(e^5 - 1).$$

**5)** Data la funzione $f(x, y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3e^x - 3$, verificare che in un intorno di $(0, 0)$ l'insieme dei punti del piano tali che $f(x, y) = 0$ può essere definito esplicitamente nella forma $y = g(x)$. Calcolare inoltre

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x^2}.$$

Per applicare il Teorema del Dini è sufficiente mostrare che $f(0, 0) = 0$ e che $f_y(0, 0) \neq 0$: la prima condizione si verifica banalmente, mentre per la seconda basta calcolare $f_y(x, y) = 2xy + 1 + x\cos(xy)$, da cui $f_y(0, 0) = 1$.
Dato che $g(0) = 0$ il limite richiesto comporta la risoluzione della forma indeterminata $0/0$. A tal fine possiamo utilizzare il Teorema di de l'Hopital, ottenendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x} = \lim_{x \to 0}(g'(x) + 3) = g'(0) + 3.$$

Essendo $f_x(x, y) = y^2 + y\cos(xy) + 3e^x$ e $g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x)}$, abbiamo che $g'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -3$ e il limte richiesto è quindi 0.
Anche per calcolare l'altro limite utilizziamo il Teorema di de l'Hopital, ora per due volte consecutive dato che $\lim_{x \to 0}(g'(x) + 3) = 0$, quindi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) + 3}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{g''(x)}{2} = \frac{g''(0)}{2}.$$

Per calcolare $g''(0)$ usiamo la formula

$$g''(x) = \frac{-f_y(x, g(x))(f_y(x, g(x))f_{xx}(x, g(-x)) - f_x(x, g(x))f_{xy}(x, g(x))) + f_x(x, g(x))(f_y(x, g(x))f_{xy}(x, g(x)) - f_x(x, g(x))f_{yy}(x, g(x)))}{(f_y(x, g(x)))^3},$$

da cui segue, essendo $f_{xx}(0, 0) = 3$, $f_{xy}(0, 0) = 1$, $f_{yy}(0, 0) = 0$, $g''(0) = 3$ e il limite richiesto è $\frac{3}{2}$.

**6)** Verificare che l'equazione $2x^3 + y^4 + z^3 - xz - 2x = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = g(x, y)$ in un intorno di $(1, 0, 0)$. Scrivere l'equazione del piano tangente in $(1, 0, 0)$ alla superficie di equazione $z = g(x, y)$.

Definiamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ come $f(x, y, z) = 2x^3+y^4+z^3-xz-2x$, essendo $f(1, 0, 0) = 0$ e $f_z(1, 0, 0) = -1 \neq 0$ possiamo applicare il Teorema del Dini, da cui segue la tesi.
L'equazione del piano tangente in $(1, 0, 0)$ alla superficie di equazione $z = g(x, y)$ è

$$z - g(1, 0) = g_x(1, 0)(x - 1) + g_y(1, 0)(y - 0),$$

quindi, essendo $g(1, 0) = 0$ (per costruzione), $g_x(1, 0) = -\frac{f_x(1,0,0)}{f_z(1,0,0)} = 4$ e $g_y(1, 0) = -\frac{f_y(1,0,0)}{f_z(1,0,0)} = 0$, abbiamo che l'equazione del piano tangente è $z = 4(x - 1)$.

**7)** Verificare che il sistema

$$\begin{cases} x + \log(y) + z = 2 \\ 2x - y^2 + z = 1 \end{cases}$$

definisce implicitamente, per $x$ in un intorno di 0, due funzioni $y = g(x)$ e $z = h(x)$ tali che $g(0) = 1$ e $h(0) = 2$. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 delle funzioni $g$ e $h$ nel punto $x_0 = 0$.

Definiamo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ come

$$F(x, y, z) = (x + \log(y) + z - 2, 2x - y^2 + z - 1) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z)).$$

Volendo utilizzare il Teorema del Dini, dopo aver calcolato

$$J_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} & 1 \\ 2 & -2y & 1 \end{pmatrix},$$

verifichiamo che $F(0, 1, 2) = (0, 0)$ e che

$$\det \begin{pmatrix} F_{1y}(0,1,2) & F_{1z}(0,1,2) \\ F_{2y}(0,1,2) & F_{2z}(0,1,2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Perciò il Teorema implica l'esistenza delle funzioni $g$ e $h$, che risultano $C^\infty$ essendo tale $F$. Inoltre

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} F_{1y}(x, g(x), h(x)) & F_{1z}(x, g(x), h(x)) \\ F_{2y}(x, g(x), h(x)) & F_{2z}(x, g(x), h(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_{1x}(x, g(x), h(x)) \\ F_{2x}(x, g(x), h(x)) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{1}{g(x)} & 1 \\ -2g(x) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\frac{1}{g(x)} + 2g(x)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2g(x) & \frac{1}{g(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che implica

$$g'(x) = \frac{g(x)}{2g^2(x) + 1}, \quad h'(x) = -1 - \frac{1}{2g^2(x) + 1}, \tag{$*$}$$

da cui si ricava che $g'(0) = \frac{1}{3}$ e $h'(0) = -\frac{4}{3}$. Derivando ulteriormente le espressioni delle derivate prime in $(*)$ ricaviamo le derivate seconde:

$$g''(x) = \frac{g'(x)(2g^2(x) + 1) - 4g^2(x)g'(x)}{(2g^2(x) + 1)^2}, \quad h''(x) = \frac{4g(x)g'(x)}{(2g^2(x) + 1)^2},$$

e quindi $g''(0) = -1/27$ e $h''(0) = 4/27$. In definitiva i polinomi di Taylor sono

$$T_2(g(x); x_0 = 0) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{54}x^2, \quad T_2(h(x); x_0 = 0) = 2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{27}x^2.$$