Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 9 – 16 dicembre 2015

1) Calcolare i seguenti integrali tripli

$$\iiint_D x \qquad \text{in } D = \{(x,y,z) \in R^3 \,:\, \max(|x|,|y|) \le \pi,\, \sin(x) \le z \le \cos(y)+1\},$$

$$\iiint_E 24yz \qquad \text{in } E = \{(x,y,z) \in R^3 \,:\, 0 \le x \le 1,\, y \ge 0,\, z \ge 0,\, y^2+z^2 \le x\}.$$

Il primo integrale si può calcolare per fili:

$$\iiint_D x = \iint_{\{|x|\le\pi,|y|\le\pi\}} \left(\int_{\sin(x)}^{\cos(y)+1} x\,dz\right) dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi (x(\cos(y)+1) - x\sin(x))\,dy\right) dx =$$

$$= \int_0^\pi ((x\sin(y)+xy-xy\sin(x))|_{y=0}^{y=\pi})\,dx = \pi\int_0^\pi (x-x\sin(x))\,dx = \frac{\pi^3}{2}+x\cos(x)|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \cos(x)\,dx = \frac{\pi^3}{2}-\pi.$$

Il secondo integrale si può calcolare per strati:

$$\iiint_E 24yz = \int_0^1 \left(\iint_{\{?0\le y^2+z^2\le x,\, y,z\ge 0\}} 24yz\,dy\,dz\right) dx = 24\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \rho^3\cos(\theta)\sin(\theta)\,d\rho\right) d\theta\right) dx =$$

$$= 24\int_0^1 \frac{x^2}{8}\,dx = 1.$$

4) Discutere la convergenza del seguente integrale improprio (e calcolarlo se convergente)

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sul dominio compreso fra il semicerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2 contenuto in $\{y \le 0\}$ e il cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio 1.

In coordinate polari

$$D = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times (0,2\pi] \,:\, \pi \le \theta \le 2\pi,\, \rho(\theta) \le \rho \le 2\},$$

dove $\rho(\theta)$ deve soddisfare $(\rho(\theta)\sin(\theta)+1)^2+\rho^2(\theta)\cos^2(\theta) = 1$, quindi $\rho(\theta) = -2\sin(\theta)$. Dunque

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_\pi^{2\pi} \left(\int_{-2\sin(\theta)}^2 1\,d\rho\right) d\theta = \int_\pi^{2\pi} (2+2\sin(\theta))\,d\rho = 2\pi - 4.$$

5) Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\iint_B \left(\frac{1}{(|x|+|y|)\log(\sqrt[6]{x^2+y^2})}\right)^2$$

dove $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1)\}$.

Essendo $|x|+|y| \ge \sqrt{x^2+y^2}$ ed essendo $\log(\sqrt[6]{x^2+y^2}) = \frac{1}{3}\log(\sqrt[2]{x^2+y^2})$

$$\left(\frac{1}{(|x|+|y|)\log(\sqrt[6]{x^2+y^2})}\right)^2 \le \frac{9}{(\sqrt{x^2+y^2})^2\log^2(\sqrt[2]{x^2+y^2})},$$

quindi, poiché $\iint_B \frac{9}{(\sqrt{x^2+y^2})^2\log^2(\sqrt[2]{x^2+y^2})}$ è convergente (vedi Esercizio 3), anche $\iint_B \left(\frac{1}{(|x|+|y|)\log(\sqrt[6]{x^2+y^2})}\right)^2$ converge.

8) Stabilire quali delle seguenti superfici parametriche sono regolari

$$\Sigma_1 = \{(2u\cos(v), -1+4u, u\sin(v)) \,:\, u \in \mathbb{R},\, v \in [0,2\pi)\},$$

$$\Sigma_2 = \{(2\cos(v), u, 2\sin(v)) \,:\, u \in \mathbb{R},\, v \in [0,2\pi)\}.$$

Disegnare le superfici in $\mathbb{R}^3$.

La superficie Σ_1 è definita dalla parametrizzazione

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathbb{R} \times [0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (2u\cos(v), -1+4u, u\sin(v)), \end{array}$$

con $\varphi \in C^\infty$, ma con Jacobiano

$$J = \begin{pmatrix} 2\cos(v) & -2u\sin(v) \\ 4 & 0 \\ \sin(v) & u\cos(v) \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 solo se $u \neq 0$, quindi la superficie non è regolare. Del resto la mappa φ_1 non è neanche iniettiva in quanto $\varphi_1(0, v_1) = \varphi_1(0, v_2)$ per ogni $u, v \in [0, 2\pi)$.
Invece la superficie Σ_2 è definita dalla parametrizzazione

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & \mathbb{R} \times [0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (2\cos(v), u, 2\sin(v)), \end{array}$$

con $\varphi_2 \in C^\infty$ e Jacobiano

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -2\sin(v) \\ 1 & 0 \\ 0 & 2\cos(v) \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 per ogni $(u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$. Quindi la superficie è regolare.

Per disegnarle è sufficiente osservare che Σ_1 è un cono che proietta l'ellisse $\{\frac{x^2}{\sqrt{2}} + z^2 = 1,\, y = 4\}$ dal punto $(0, -1, 0)$. Quindi l'asse del cono è parallelo all'asse delle y.
Invece Σ_2 è un cilindro con asse parallelo all'asse delle y e sezione nel piano xz $\{x^2 + z^2 = 4\}$.

9) Calcolare l'area della superficie $z = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8}$ al variare di (x, y) in

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1,\, x > 0\}.$$

Detta $f(x, y) = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8}$ abbiamo che $|\nabla f(x, y)|^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$, quindi essendo la superficie il grafico della funzione f:

$$Area(\Sigma) = \int_\Sigma 1\, d\sigma = \iint_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}.$$

Definendo il cambio di variabili $(x, y) = (3\rho\cos(\theta), 4\rho\sin(\theta))$, il cui determinante dello Jacobiano risulta essere 12ρ, otteniamo

$$\iint_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 12\rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho \right) d\theta = 4\pi(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

9) Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_\Sigma \frac{x^2 + y^2}{z^3}\, d\sigma \quad \Sigma = \{(\sin(uv), \cos(uv), u) \,:\, (u,v) \in \mathbb{R}^2,\, \frac{1}{2} < u < v,\, v < 1\}$$

Sia $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{2} < u < v,\, v < 1\}$, allora la superficie risulta parametrizzata della seguente mappa φ:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \Omega & \longrightarrow & \Sigma \\ & (u,v) & \longmapsto & (\sin(uv), \cos(uv), u). \end{array}$$

Quindi

$$N(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \left| \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v\cos(uv) & -v\sin(uv) & 1 \\ u\cos(uv) & -u\sin(uv) & 0 \end{pmatrix} \right| = u(\sin(uv)\,\underline{i} + \cos(uv)\,\underline{j}),$$

e $\|N(u,v)\| = u$. Allora

$$\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3}\,d\sigma = \iint_\Omega \frac{\sin^2(uv)+\cos^2(uv)}{u^3}\,\|N(u,v)\|\,du\,dv = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{v} \frac{du}{u^2} \right) dv = 1 + \log(\frac{1}{2}).$$