Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 9 – 16 dicembre 2015

Esercizio 1: Calcolare i seguenti integrali tripli

$$\iiint_D x \qquad \text{in } D = \{(x,y,z) \in R^3 \,:\, \max(|x|,|y|) \le \pi,\, \sin(x) \le z \le \cos(y)+1\},$$

$$\iiint_E 24yz \qquad \text{in } E = \{(x,y,z) \in R^3 \,:\, 0 \le x \le 1,\, y \ge 0,\, z \ge 0,\, y^2+z^2 \le x\}.$$

Esercizio 2: Calcolare l'integrale improprio

$$\iint_\Omega xye^{-\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{in } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x,y>0\}.$$

Esercizio 3: Discutere al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\iint_{B_r} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \qquad \iint_{B_r} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha \log^\beta(\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2\setminus B_r} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \qquad \iint_{\mathbb{R}^2\setminus B_r} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha \log^\beta(\sqrt{x^2+y^2})}$$

dove $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le r^2)\}$, $r>0$.

Esercizio 4: Discutere la convergenza del seguente integrale improprio (e calcolarlo se convergente)

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sul dominio compreso fra il semicerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2 contenuto in $\{y \le 0\}$ e il cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio 1.

Esercizio 5: Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\iint_B \left(\frac{1}{(|x|+|y|)\log(\sqrt[6]{x^2+y^3})}\right)^2$$

dove $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1)\}$.

Esercizio 6: Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge il seguente integrale improprio

$$\iint_\Omega \frac{y^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \ge 1,\, x,y \ge 0\}.$$

(Suggerimento: per $\alpha \ge 1$ può essere utile osservare che $\Omega \supset \tilde{\Omega} := \{(x,y) \in \Omega \,:\, y \ge x\} \dots$)

Esercizio 7: Calcolare il seguente integrale improprio

$$\iint_Q \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} \qquad \text{dove } Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 1,\, |y| leq 1\}.$$

Esercizio 8: Stabilire quali delle seguenti superfici parametriche sono regolari

$$\Sigma_1 = \{(2u\cos(v), -1+4u, u\sin(v)) \,:\, u \in \mathbb{R},\, v \in [0,2\pi)\},$$

$$\Sigma_2 = \{(2\cos(v), u, 2\sin(v)) \,:\, u \in \mathbb{R},\, v \in [0,2\pi)\}.$$

Esercizio 9: Calcolare l'area della superficie $z = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8}$ al variare di (x,y) in

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \le 1,\, x>0\}.$$

Disegnare le superfici in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 10: Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{z^3} \qquad \Sigma = \{(\sin(uv), \cos(uv), u) \,:\, (u,v) \in \mathbb{R}^2,\, \frac{1}{2} < u < v,\, v < 1\}$$