Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 8 – 10 dicembre 2015
Alcune soluzioni

5) Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} xy^2$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 1,\, x < 0,\, y > 0\}$

Descriviamo Ω, che è un quarto dell'ellisse $\{x^2 + 2y^2 < 1\}$, attraverso il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin(\theta) \end{cases}$$

con le seguenti limitazioni per le variabili ρ e θ

$$0 \leq \rho < 1 \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

da cui $\det(J) = \frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Quindi

$$\iint_{\Omega} xy^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 \rho^4\cos(\theta)\sin^2(\theta)\,d\rho\right)d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(\theta)\sin^2(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^4\,d\rho\right) = -\frac{\sqrt{2}}{30}.$$

6) Calcolare, per fili, la misura del seguente insieme:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}.$$

Possiamo riscrivere E come

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\},$$

quindi integrando per fili e poi passando a coordinate polari nell'integrale doppio $(*)$

$$\begin{aligned} \iiint_E 1 &= \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\left(\int_{2x^2+2y^2}^{1+x^2+y^2} dz\right)dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\left(1 - x^2 - y^2\right)dx\,dy \\ &\overset{(*)}{=} 2\pi\int_0^1 \rho(1-\rho^2)d\rho = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7) Calcolare, per strati, il seguente integrale triplo:

$$\iiint_F z$$

dove $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 2\}$.

Essendo $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq z \leq 2,\, x, y \geq 0,\, 0 \leq x + y \leq 2 - z\}$ possiamo calcolare l'integrale per strati:

$$\iiint_F z = \int_0^2\left(\iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x,y\geq 0,\,0\leq x+y\leq 2-z\}} z\,dx\,dy\right)dz.$$

Poiché

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x,y \geq 0,\, 0 \leq x+y \leq 2-z\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 2-z,\, 0 \leq y \leq -x+2-z\}$,

$$\begin{aligned}\iiint_F z &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-z} \left(\int_0^{-x+2-z} z\,dy\right) dx\right) dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2-z} (-x+2-z)z\,dx\right) dz = \\ &= \int_0^2 z(-\frac{x^2}{2} + (2-z)x)|_{x=0}^{x=2-z}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^2 (2-z)^2 z\,dz = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

8) Calcolare, usando le coordinate sferiche

$$\iiint_\Omega \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 < x^2+y^2+z^2 < 2, y > 0\}$.

Passando alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \cos(\varphi), \end{cases}$$

possiamo riscrivere Ω come

$$\Omega = \{(\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi) \,:\, 1 < \rho < \sqrt{2},\, 0 < \theta < \pi\}$$

e, ricordando che il determinante dello Jacobiano della trasformazione è $\rho^2 \sin\varphi$, abbiamo

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{x^2}{x^2+y^2} &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin(\varphi)\cos^2(\theta)\,d\rho = \\ &= \left(\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^\pi \cos^2(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2\,d\rho\right) = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

9) Calcolare, usando le coordinate cilindriche,

$$\iiint_\Omega \frac{z+1}{1+x^2+y^2}$$

dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 < 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Passando a coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z, \end{cases}$$

abbiamo che $\Omega = \{(\rho,z) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R} \,:\, 0 \leq \rho < 1, 0 \leq z \leq 1\}$ e, ricordando che il determinante dello Jacobiano della trasformazione è ρ, otteniamo

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{z+1}{1+x^2+y^2} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \rho\,\frac{z+1}{1+\rho^2}\,d\rho\right) dz = \left(\int_0^1 (z+1)\,dz\right)\left(\int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho\right) \\ &= \left(\frac{z^2}{2} + z|_0^1\right)\left(\frac{1}{2}\log(1+\rho^2)|_0^1\right) = \frac{3}{4}\log(2).\end{aligned}$$