esonero Analisi Matematica II dell' 11/11/15

1. Studiare al variare del parametro $\alpha > 0$ continuità e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{x^2}-1)\sin y}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Data la funzione

$$f(x,y) = e^{3x+y} - 3\,e\,x\,y$$

i) studiare l'insieme di livello $Z = \{(x,y) \mid f(x,y) = e\}$;

ii) determinare il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione definita implicitamente in un intorno di $(0,1)$.

3. Data la funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + 2\,y^2 + z^2 - 10\,x - 1$$

e l'insieme

$$D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + 2\,z^2 \geq 2\}$$

i) trovare i punti di minimo e massimo relativo di f nell'interno di D;

ii) determinare estremo superiore ed inferiore di f in ∂D, dire se sono massimo e minimo e, in caso affermativo, trovare i corrispondenti punti di massimo e minimo;

iii) determinare estremo superiore ed inferiore di f in D, dire se sono massimo e minimo e, in caso affermativo, trovare i corrispondenti punti di massimo e minimo.

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = (\varphi(x+y), \psi(x-y))$$

con φ e ψ funzioni reali di una variabile reale con insieme di definizione $\mathbb{R}$

i) dimostrare che f è differenziabile se e solo se φ e ψ sono derivabili;

ii) trovare una condizione sufficiente affinchè f sia localmente invertibile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.