Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 7 – 3 dicembre 2015
Alcune soluzioni

4) Calcolare, se esiste, il limite quasi ovunque delle successioni di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{3+x^n}, \quad g_n(x) = \max(-n, \min(\frac{1}{x^3}, n)), \quad h_n(x) = \begin{cases} \cos(n\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ \cos(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}. \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per $n \to +\infty$

$$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } |x| > 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{se } x = 1 \\ \nexists & \text{se } x = -1, \end{cases}$$

quindi f_n converge q.o. alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

$g_n(x)$ è la troncata (a $\pm n$) della funzione $g(x) = \frac{1}{x^3}$ e quindi converge q.o. a g. Invece $h_n(x)$ è uguale quasi ovunque alla funzione $h(x) = \cos(x)$ e quindi in particolare converge q.o. ad h.

5) Sia $M > 0$ e sia $f : [0,1] \to [-M, M]$ una funzione misurabile e continua in 0. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Sia $f_n(x) := f(\frac{x}{n})$, dalla continuità di f in 0 $f_n \to f(0)$ per $n \to +\infty$. Allora, essendo $|f_n(x)| \leq M$ (e M è chiaramente sommabile in $[0,1]$), per il Teorema di Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f\left(\frac{x}{n}\right) = \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = \int_{[0,1]} f(0) = f(0).$$

6) Sia

$$f_n(x) = n\chi_{[\sin(\frac{1}{2n}),\sin(\frac{1}{n})]}(x). \qquad x \in [0,1]$$

e sia $f(x)$ il limite quasi ovunque della successione di funzioni $f_n(x)$. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) \quad \text{e} \quad \int_{[0,1]} f(x).$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (n(\sin(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{2n}))) = \lim_{n\to+\infty} (n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}))) = \frac{1}{2},$$

mentre il limite puntuale delle f_n è $f \equiv 0$, quindi $\int_{[0,1]} f(x) = 0$.

7) Calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{(0,1)} x^n(1-x)e^x.$$

Sia $f_k(x) := \sum_{n=1}^{k} x^n(1-x)e^x$. La successione f_k delle somme parziali è monotona crescente essendo a termini positivi, quindi per il Teorema di Beppo Levi si può scambiare l'integrale con la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{(0,1)} x^n(1-x)e^x = \int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x)e^x = \int_{(0,1)} \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)(1-x)e^x = \int_{(0,1)} xe^x = 1.$$

8) Sia a_k la successione $1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, \ldots$. Calcolare

$$\int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, \chi_{(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})}(x).$$

Sia $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k \, \chi_{(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})}(x)$. La successione f_n delle somme parziali è monotona crescente essendo a termini positivi, quindi per il Teorema di Beppo Levi si può scambiare l'integrale con la serie:

$$\int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, \chi_{(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{[0,1]} a_k \, \chi_{(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{1}{2^k} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3j+1}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{2^{3j+2}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{4}{2^{3j+3}}$$

$$= 3 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3j+1}} = \frac{3}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{8^j} = \frac{12}{7}.$$

9) Calcolare i seguenti integrali multipli

(a) $\iint_\Omega \sin(x+y)$, $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \le y \le \frac{3\pi}{2}\}$;

(b) $\iint_\Omega \cos(x) \frac{\log(y)}{3y}$, $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 0 \le x < \frac{\pi}{2}, 1 < y \le 4\}$;

(c) $\iint_\Omega \frac{1}{(x^2+y)^2}$, $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 1 \le x \le \sqrt{3}, 0 \le y \le 1\}$.

$$\iint_\Omega \sin(x+y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x+y)\, dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos(x+y)|_{y=\frac{\pi}{2}}^{y=\frac{3\pi}{2}} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x+\frac{\pi}{2}) - \cos(x+\frac{3\pi}{2}) \right) dx = \left(\sin(x+\frac{\pi}{2}) - \sin(x+\frac{3\pi}{2}) \right) |_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = -2.$$

$$\iint_\Omega \cos(x) \frac{\log(y)}{3y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^4 \cos(x) \frac{\log(y)}{3y}\, dy \right) dx = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx \right) \left(\int_1^4 \frac{\log(y)}{3y}\, dy \right) =$$

$$= \left(\sin(x)|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \right) \left(\frac{1}{6} \log^2(y)|_{y=1}^{y=4} \right) = \frac{1}{6} \log^2(4).$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{(x^2+y)^2} = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 \frac{1}{(x^2+y)^2}\, dy \right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{(x^2+y)}|_{y=0}^{y=1} \right) dx =$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = -\frac{1}{3x^3}|_{x=1}^{x=\sqrt{3}} - \arctan(x)|_{x=1}^{x=\sqrt{3}} = -\frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3} - \frac{\pi}{12}.$$