Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 7 – 3 dicembre 2015

Esercizio 1: Sia $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ misurabile e sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } g(x) \geq 0 \\ \arctan(x) & \text{se } g(x) < 0. \end{cases}$$

Dimostrare che f è misurabile.

Esercizio 2: Sia $N \subset \mathbb{R}$ un insieme non misurabile e sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \in N \\ -x^2 - 1 & \text{se } x \notin N. \end{cases}$$

Mostrare che l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \, : \, f(x) = \alpha\}$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Stabilire se f è misurabile.

Esercizio 3: Calcolare, se esiste, il limite quasi ovunque delle successioni di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{3 + x^n}, \quad g_n(x) = \max(-n, \min(\frac{1}{x^3}, n)), \quad h_n(x) = \begin{cases} \cos(n\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ \cos(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4: Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{(1,+\infty)} \frac{\sin(nx)}{x^2} e^{-nx}, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty)} \frac{2}{1 + x^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{[-1,1]} \frac{nx}{1 + n^2 x^2}.$$

Esercizio 5: Sia $M > 0$ e sia $f : [0, 1] \to [-M, M]$ una funzione misurabile e continua in 0. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Esercizio 6: Sia

$$f_n(x) = n\chi_{[\sin(\frac{1}{2n}),\sin(\frac{1}{n})]}(x). \qquad x \in [0, 1]$$

e sia $f(x)$ il limite quasi ovunque della successione di funzioni $f_n(x)$. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) \quad \text{e} \quad \int_{[0,1]} f(x).$$

Esercizio 7: Calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{(0,1)} x^n (1 - x) e^x.$$

Esercizio 8: Sia a_k la successione $1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, \ldots$. Calcolare

$$\int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, \chi_{(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})}(x).$$

Esercizio 9: Calcolare i seguenti integrali multipli

(a) $\iint_\Omega \sin(x + y), \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3\pi}{2}\};$

(b) $\iint_\Omega \cos(x) \frac{\log(y)}{3y}, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \, 1 < y \leq 4\};$

(c) $\iint_\Omega \frac{1}{(x^2+y)^2}, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 1 \leq x \leq \sqrt{3}, \, 0 \leq y \leq 1\}.$